Disegno Sperimentale e Metodi di Taguchi nel Controllo di Qualità off-line

Rossella Berni

Università **degli Studi** di Firenze

Prefazione

Il presente lavoro è stato preparato per un Seminario tenuto nel mese di aprile 1998 presso il Dipartimento di Scienze Economiche e Statistiche di Trieste, nell' ambito del corso di Statistica Aziendale. In relazione allo scopo del Seminario, il lavoro riprende alcuni strumenti fondamentali della statistica metodologica finalizzati al Controllo di Qualità in fase sperimentale, quali l'analisi della varianza e il disegno sperimentale, poiché i concetti metodologici che li caratterizzano costituiscono la base per definire e illustrare il metodo *Parameter Design* di Taguchi.

La struttura di questo scritto può quindi essere idealmente suddivisa in due parti. Nella prima parte si considerano inizialmente i principali concetti di Analisi della Varianza utili per definire cosa sono la pianificazione e il disegno sperimentale. Successivamente si illustrano, ma solo con esempi, i disegni sperimentali che risultano più utilizzati nel controllo di qualità, tra i quali il disegno fattoriale e quello fattoriale frazionale. La seconda parte è interamente dedicata ai metodi di qualità *off-line*. In particolare, ad una iniziale introduzione sul significato di "qualità in fase sperimentale" si affianca la definizione di qualità per Taguchi. Infine, si procede alla descrizione teorica del metodo del *Parameter Design*, illustrato anche con un esempio applicativo, tratto dalla letteratura, che mette in evidenza sia la semplicità che l'aspetto euristico del metodo di Taguchi.

Si deve osservare che, proprio per il ruolo introduttivo del Seminario, non si sono approfonditi quelli che sono i limiti sia della pianificazione sperimentale sia, soprattutto, del metodo di Taguchi, per i quali rimandiamo alla letteratura specifica.

1 L' Analisi della Varianza nella pianificazione degli esperimenti: fondamenti

Il problema fondamentale della ricerca sperimentale è di verificare se al variare di certe condizioni (fattori sperimentali o trattamenti) i risultati sperimentali si modificano sistematicamente. In questo contesto il disegno sperimentale e la pianificazione degli esperimenti hanno un ruolo fondamentale insieme alla analisi della varianza, metodologia statistica che consente di dare una risposta al problema costituendo il fondamento per l'analisi della variabilità. In quest'ottica è quindi nostro interesse puntualizzare alcuni concetti dell' analisi della varianza, fondamentali per lo scopo precipuo del lavoro.

Consideriamo inizialmente n risultati ottenuti effettuando un esperimento in cui le unità di osservazione sono disposte casualmente secondo k gruppi o k livelli di un fattore; dove per fattore si intende una variabile indipendente che ha influenza sulla variabile di risposta, o dipendente, assunta a misura dell' esperimento. In questo senso, la struttura sperimentale di base è la più semplice possibile e i k gruppi o livelli possono essere, per esempio, dosi di un farmaco, tipi di fertilizzante, tipi di prodotto. Ciascuna distinta situazione sperimentale, connessa al singolo gruppo o livello, è detta combinazione o condizione sperimentale; ciascuna prova in corrispondenza di ogni combinazione sperimentale è detta osservazione sperimentale.

Il nostro scopo iniziale è quello di capire se la variabilità complessiva dello studio effettuato può essere suddivisa in distinte fonti di variabilità. Una variabilità imputabile alla classificazione rispetto ai trattamenti e una variabilità dovuta agli effetti accidentali di fattori di perturbazione, che, a questo livello introduttivo, non sono misurabili né tantomeno controllabili. A questa iniziale distinzione possiamo associare due componenti; la prima fonte di variabilità, di natura sistematica, deriva dalla strategia sperimentale effettuata e può essere identificata- in questa prima spiegazione- nella Devianza Tra Gruppi (D_B), mentre la seconda fonte di variabilità riguarda la variabilità accidentale, parte della variabilità complessiva che risulta "non spiegata" e che viene valutata tramite la Devianza Entro Gruppi (D_W). La somma di queste due componenti di variabilità è uguale alla DevianzaTotale e la relazione ora espressa è detta scomponibilità della devianza. La valutazione della D_W avviene introducendo il concetto di Replicazione; ovvero la possibilità di ripetere l'esperimento un numero finito di volte nelle medesime condizioni sperimentali. Il concetto di replicazione è molto importante nell' analisi della varianza e nella strategia sperimentale. Si ipotizza, fondamentalmente, che la variabilità accidentale si manifesti implicitamente proprio tramite la misura ripetuta in condizioni sperimentali identiche. Allora, la differenziazione tra tali repliche, che sicuramente non daranno un identico risultato proprio perché le condizioni sperimentali sono solo ipoteticamente identiche, è imputabile agli effetti di quei fattori accidentali o di perturbazione e la replicazione risulta l'unico strumento di cui disponiamo per catturare questa componente.

Se questa distinzione iniziale tra fonte sistematica e fonte accidentale di variabilità è stimabile tramite la scomponibilità della devianza totale, va comunque sottolineato che la D_B è una stima degli effetti sistematici se e solo se si può presupporre una perfetta separabilità (additività) tra le due componenti. Questa perfetta additività si ha se e solo se è ragionevole presupporre che l'effetto dei fattori di perturbazione si manifesti, nello stesso modo ed in ugual misura, sia tra i gruppi che entro i gruppi. Quindi, in sostanza, sia tra le replicazioni appartenenti a gruppi diversi, sia tra le replicazioni entro lo stesso gruppo. Questo presupposto è garantito dal concetto di Randomizzazione. Si ha randomizzazione quando si procede ad una associazione casuale tra unità sperimentali e trattamenti o, che è lo stesso, tra unità sperimentali e livelli del fattore. Tale associazione casuale permette di ricondurre l'esperimento al concetto di campione casuale e quindi è come se campionassimo da una popolazione ipotetica e successivamente si procedesse al trattamento delle unità sperimentali.

Pertanto, sintetizzando formalmente quanto finora esposto a livello introduttivo, si può ipotizzare che la generica osservazione sperimentale y_{ij} sia così esprimibile:

$$y_{ij} = \mu_i + e_{ij} \quad i = 1, ..., k \quad j = 1, ..., n_i \tag{1}$$

dove k sono i gruppi o i livelli dell' unico fattore considerato, n_i indica la numerosità delle replicazioni entro il generico $i - mo$ gruppo o livello. La componente μ_i identifica la parte sistematica del modello di analisi della varianza, esprimibile anche come somma di:

$$\mu_i = \mu + \alpha_i \quad i = 1, ..., k \tag{2}$$

Dove α_i è l'effetto sistematico del trattamento $i - mo$; la componente e_{ij} rappresenta invece la parte di variabilità accidentale imputabile alla $j - ma$ replicazione entro lo $i - mo$ gruppo. Pertanto, dalla schematizzazione fornita, si nota come la differenziazione tra le osservazioni sperimentali entro lo stesso gruppo dipenda unicamente dalla componente casuale. Per tale componente, sulla base del criterio di randomizzazione e del concetto di replicazione, possiamo ipotizzare che:

$$e_{ij} IID \sim N(0, \sigma^2)$$

ovvero le componenti casuali si suppongono indipendenti e identicamente distribuite, (IID), secondo una distribuzione normale con media nulla e varianza costante σ^2, detta anche condizione di omoschedasticità. Queste ultime due ipotesi, (normalità dell'errore ed omoschedasticità), permettono di configurare l'analisi della varianza come un confronto tra valori medi.

Per valutare se vi è un effetto significativo del fattore coinvolto nella strategia sperimentale, si ricorre ai test di ipotesi e al concetto di ipotesi nulla (H_0). Per il modello (1) l' ipotesi nulla è data da:

$$\alpha_i = 0 \, \forall i$$

ovvero si suppone che l'effetto sistematico dovuto ai trattamenti sia nullo e quindi, per ogni $i - mo$ gruppo o livello, l'osservazione sperimentale sia somma della media generale e della componente casuale. Se si verifica questa situazione sperimentale, allora la D_B è solo un altro stimatore della variabilità accidentale. Ricordiamo infatti brevemente che:

$$D_{W_i} = \sum (y_{ij} - \mu_i)^2 \tag{3}$$

quindi D_W, per ciascun gruppo, può essere vista come somma di quadrati di n_i valori che, secondo le ipotesi esposte in precedenza e allorché vengono standardizzati con σ^2, si distribuiscono secondo una χ^2 con n_i gradi di libertà; mentre la corrispondente stima è una χ^2 con $(n_i - 1)$ gradi di libertà, in quanto μ_i è stimata tramite la media campionaria

$\bar{y}_i$. Parallelamente, la D_B ottenuta come confronto tra la media generale e le medie di gruppo:

$$D_B = \sum (\mu_i - \mu)^2 n_i \tag{4}$$

è stimabile con:

$$D_B = \sum (\bar{y}_i - \bar{y})^2 n_i \tag{5}$$

dove le $\bar{y}_i\, i = 1, ..., k$ sono k medie campionarie, calcolate su k campioni estratti da k popolazioni distribuite normalmente, e quindi anch' esse distribuite normalmente con $E(\bar{y}_i) = \mu_i$.

Supponiamo, per semplicità, che $n_i = n\ \forall i$, allora, riassumendo brevemente, si può dimostrare che anche la D_B, che esprime $(k-1)$ confronti indipendenti e ortogonali ai confronti della D_W, risulta una somma di $(k-1)$ quadrati che, standardizzati con σ^2, danno luogo alla somma di $(k-1)$ variabili casuali normali standardizzate al quadrato che si distribuiscono secondo una χ^2 con $(k-1)$ gradi di libertà se vale l'ipotesi nulla prima formulata, ovvero se la D_B risulta una stima alternativa alla componente accidentale. Se invece ciò non si verifica, la distribuzione delle $(k-1)$ variabili casuali normali standardizzate al quadrato è χ^2 non centrale con $(k-1)$ gradi di libertà dove il parametro di non centralità:

$$\frac{\sum (\mu_i - \mu)^2 n}{k-1} \tag{6}$$

dipende unicamente dall' effetto sistematico dei trattamenti α_i. In questo caso la D_B misura il reale effetto del fattore coinvolto nell' esperimento e il ricercatore rifiuta l'ipotesi nulla per accettare l'ipotesi alternativa (H_1) in cui almeno un valore α_i risulta significativamente diverso da zero al livello α.

Il test di riferimento è il test F:

$$F = \frac{D_B/(k-1)}{D_W/(N-k)} \tag{7}$$

se vale (H_0) la (7) si distribuisce secondo una Fisher centrale con $(k-1; N-k)$ gradi di libertà: $F_{(k-1,N-k;\alpha)}$, ricordando che la Fisher è esprimibile come il rapporto di due χ^2 divise per i rispettivi gradi di libertà.

2 Pianificazione e Disegno Sperimentale

Come abbiamo detto, i fondamenti dell'analisi della varianza predentemente illustrati sono essenziali per sottolineare i concetti principali del disegno sperimentale e della strategia legata alla pianificazione sperimentale. La relazione esistente tra strategia sperimentale, disegno sperimentale e analisi della varianza è esprimibile tramite lo scopo fondamentale e generale del disegno sperimentale che è quello di ridurre quanto più possibile la variabilità accidentale tramite appunto una idonea pianificazione sperimentale che riesca ad individuare, per il fenomeno oggetto di studio, i fattori che influenzano la variabile assunta a misura del fenomeno e il ruolo che questi fattori hanno nell'analisi. Nella programmazione sperimentale è infatti fondamentale procedere per fasi distinguendo essenzialmente tra l' identificazione della variabile di risposta quantitativa (o delle variabili di risposta) e dei fattori che la influenzano, di natura sia qualitativa che quantitativa, dei quali deve essere specificato, oltre al ruolo, anche il campo di variazione. Inoltre, sia in generale e soprattutto nel controllo di qualità, è di notevole importanza la disponibilità di informazioni a priori, che possono essere di aiuto per la stessa pianificazione, permettendo l'utilizzazione di piani sperimentali con un ridotto numero di osservazioni.

Il diverso ruolo dei fattori coinvolti nell'esperimento conduce a scelte strategiche diverse nella pianificazione e quindi a diversi disegni sperimentali. Una primaria distinzione si ha tra fattore sperimentale o di interesse, fattore sub-sperimentale o fattore blocco, fattore accidentale o di perturbazione. Per fattore sperimentale si intende quel fattore che si suppone influenzi direttamente la variabile di risposta Y; un esempio classico è dato dal tipo di fertilizzante che influenza la crescita di una particolare specie di pianta. In questo esempio però non si considera la tipologia del terreno, che può influenzare indirettamente la Y agendo direttamente sul tipo di fertilizzante. In questo caso la tipologia del terreno è un fattore sub-sperimentale. I due disegni sono riconducibili rispettivamente al disegno completamente casualizzato e al disegno a blocchi randomizzati completi, mentre, se si considerano più fattori, tutti di interesse per lo sperimentatore, si ha il disegno fattoriale.

Procediamo ad illustrare, con esempi specifici, questi disegni.

Il primo esempio riguarda il disegno completamente casualizzato (Logothetis e Wynn, 1989) con $N = 16$ osservazioni sperimentali relative alla misurazione in μA (microampere) dell' emissione di luce (Y) per tubi catodici (4 tipi). Il fattore sperimentale di interesse è rappresentato dal "tipo di fosforo" con $k = 4$ livelli (A,B,C,D) con cui sono trattati i tubi catodici. Il disegno si dice completamente casualizzato in quanto l' associazione tra tubo catodico e tipo di fosforo è completamente casuale ed infatti possiamo notare come, per esempio, il trattamento C compaia due volte nel tubo catodico di tipo 1 e non sia associato al tipo di tubo 4 (tab.1).

Table 1: Disegno completamente casualizzato- I valori in parentesi sono i valori di Y

Tubo catod.	1	2	3	4
	A(25)	C(4)	D(9)	A(28)
	B(22)	A(12)	C(2)	B(11)
	C(18)	B(3)	A(10)	D(20)
	C(22)	D(10)	B(5)	D(15)

In questo disegno, che possiamo considerare come la forma più semplice di piano sperimentale, si prescinde da valutazioni più sottili della componente sistematica. In relazione ai dati di tab.1 si hanno i risultati dell'analisi della varianza presentati in tab.2. Come si può notare la fonte di variabilità "tipo di fosforo" coincide esattamente in questo caso con la D_B. Tale fattore risulta non significativo confrontando il valore del test F uguale a 0.8 con il valore tabulato corrispondente: $F_{(3,12;0.05)} = 3.49$; pertanto si accetta l' ipotesi nulla di non influenza del tipo di fosforo sull'emissione di luce. Il modello di riferimento è in questo caso il modello espresso in (1) con $n_i = n = 4$ e $k = 4$. A questo riguardo si noti infatti come i dati di tab.1 possano essere riorganizzati secondo i 4 livelli del tipo di fosforo e i tubi catodici costituiscano gli elementi di replicazione. Diventa allora evidente che la replicazione non viene effettuata in condizioni sperimentali identiche con influenze di tipo esclusivamente accidentale. Nel valore della replicazione va infatti a confondersi anche l' effetto " tubo catodico".

Table 2: Risultati dell'analisi della varianza per i dati di tab.1

Fonte var.	Dev.	g.l.	F-value
fosforo	168.5	3	0.8
errore	841.5	12	-
Totale	1010.0	15	-

È proprio con il secondo esempio (Logothetis e Wynn, 1989) che si procede ad una pianificazione più specifica e selettiva. Viene infatti introdotto il fattore "tubo catodico"come fattore sub-sperimentale o fattore blocco. Il disegno che ne deriva è il disegno a blocchi randomizzati completi, nel quale l'assegnazione casuale dei trattamenti è fatta entro ciascun blocco, contraddistinto dal tipo di tubo catodico. Si parla di disegno completo

Table 3: Disegno a blocchi randomizzati completi - I valori in parentesi sono i valori di Y

Tipo F./Tubo cat.	1	2	3	4
A	A(25)	C(4)	D(9)	A(28)
B	B(22)	A(12)	C(2)	B(11)
C	C(18)	B(3)	A(10)	D(20)
D	D(15)	D(10)	B(5)	C(22)

perché tutti i trattamenti sono assegnati casualmente entro ciascun blocco. I dati sono mostrati in tab.3 e il prospetto riassuntivo dei risultati di analisi della varianza (tab.4) mostra il vantaggio informativo che otteniamo rispetto al tipo di disegno precedente. Infatti, in questo caso, la fonte di variabilità sistematica viene ad essere formata da due componenti: la parte di variabilità relativa al fattore sperimentale di interesse e quella relativa al fattore sub-sperimentale. Osserviamo che la variabilità complessiva del disegno rimane, ovviamente, invariata. Tutto ciò a conferma di quanto abbiamo già detto a livello introduttivo, ovvero che la pianificazione sperimentale ha come scopo la riduzione della variabilità accidentale o non spiegata. Infatti la componente di variabilità del fattore blocco va proprio a diminuire la fonte accidentale e quindi aumenta la significatività del fattore sperimentale, che rimane comunque non significativo al livello $\alpha = 0.05$, mentre risulta significativo al livello $\alpha = 0.10$, essendo $F_{(3,9;0.10)} = 2.81$. Il fattore blocco risulta altamente significativo con $F_{(3,9;0.01)} = 6.99$; come è illustrato in tab.4.

Il modello sottostante al disegno a blocchi randomizzati completi è:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + b_j + e_{ij} \quad j = 1, ..., 4; i = 1, ..., 4 \tag{8}$$

dove α_i indica il generico effetto $i - mo$ del fattore sperimentale, b_j indica il generico effetto $j - mo$ del fattore blocco. Si noti la completa additività tra fattore sperimentale e fattore blocco che deve poter essere ipotizzata a priori per garantire che vi sia la completa separabilità o identificazione degli effetti relativi ai due fattori.

Nella pianificazione sperimentale il passo successivo all' introduzione di un fattore blocco potrebbe essere la considerazione di un altro fattore sub-sperimentale, per esempio,

Table 4: Risultati dell'analisi della varianza per i dati di tab.3

Fonte var.	Dev.	g.l.	F-value
fosforo	168.5	3	3.7
tubo catodico	703.5	3	15.3**
errore	138.0	9	-
Totale	1010.0	15	-

con riferimento ai dati finora utilizzati, il "tipo di schermo". In questo caso il disegno sperimentale si chiama disegno a Quadrato Latino in cui ai due fattori sub-sperimentali, di riga e colonna, vengono associati casualmente i trattamenti del fattore sperimentale; il blocco è identificato in questo caso dalla generica casella (ij). Per motivi di brevità non possiamo illustrare questo disegno, che può, a livello di comprensione generale, essere visto come estensione del disegno a blocchi randomizzati completi.

Quando tutti i fattori giuocano un ruolo di primo piano, ovvero sono tutti fattori sperimentali, si ha il disegno fattoriale completo. In tal caso è necessario procedere ad una distinzione del tipo di effetto. La fonte di variabilità sistematica può essere infatti scomposta in effetti principali e interazioni.

Dato un disegno fattoriale completo con due fattori A e B entrambi a due livelli, per effetto principale si intende la quota di variabilità sistematica imputabile al singolo fattore; si ha invece interazione AB tra i due fattori quando si ha variazione tra i livelli di A al variare dei livelli di B. Nel caso di assenza di interazione si ha un effetto additivo tra i due effetti principali di A e B; cosa che non avviene allorché vi è interazione. In questo caso, infatti, la differenza tra le medie marginali, di riga o di colonna, non è uguale alla somma degli scostamenti tra le medie del fattore considerato entro i livelli, di riga o colonna, dell' altro (Cox, 1958). La differenza tra le due diverse situazioni sperimentali, presenza o assenza di interazione, può essere ben compresa anche osservando i due modelli. In assenza di interazione, si ha:

$$y_{ijr} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijr} \quad j = 1,..p; i = 1,..q; r = 1,..,t \tag{9}$$

mentre, nel momento in cui si può ragionevolmente presupporre che vi sia interazione, il modello corrispondente risulta:

$$y_{ijr} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijr} \quad j = 1,..p; i = 1,..q; r = 1,..,t \tag{10}$$

dove con $r = 1, ..., t$ si indica la generica $r - ma$ replicazione entro la casella (ij), relativa alla generica combinazione sperimentale di A e B, considerando per semplicità un disegno bilanciato, con numero di replicazioni uguale per ogni casella. Pertanto si osservi come, nel caso di piano fattoriale completo, sia necessario disporre di t replicazioni per ogni casella, come si evidenzia nell' esempio seguente (tab.5) tratto da Montgomery (1991)[1], in cui $t = 4$. I dati riguardano 9 combinazioni sperimentali con $N = 36$ osservazioni relative alla misurazione in ore della durata di vita della batteria (Y). I due fattori sperimentali di interesse, A e B, entrambi a tre livelli, rappresentano rispettivamente il tipo di materiale per la batteria (1,2,3) e la temperatura, espressa in gradi centigradi: $15°, 70°, 125°$.

[1]Per brevità non presentiamo i risultati di analisi della varianza per questi dati

Table 5: Disegno fattoriale completo - I valori di casella sono le replicazioni per ciascuna combinazione sperimentale

Mat./Temp.	15	70	125
1	130;155;74;180	30;40;80;75	20;70;82;58
2	150;188;159;126	136;122;106;115	25;70;58;45
3	138;110;168;160	174;120;150;139	96;104;72;60

L' interazione si ottiene dopo aver calcolato la variabilità dei due effetti principali, in quanto risulta dalla somma della devianza entro, calcolata per ciascuna casella, diminuita della devianza relativa all'effetto di A e B; la devianza di errore si ha come residuo. Pertanto, l' interazione è una componente sistematica che riduce ulteriormente la variabilità accidentale.

Sempre con riferimento ai dati di tab.5 è necessario fare due ultime osservazioni. L'unica interazione valutabile è in questo caso l'interazione del I ordine AB; che coinvolge solo due fattori. Se il disegno considera più di due fattori, in generale $d + 1$, si ha la possibilità di stimare più effetti di interazione, dal I ordine (due fattori) fino al $d - mo$ ordine ($d + 1$ fattori). La seconda osservazione riguarda il numero complessivo di osservazioni sperimentali, che, proprio per la presenza di replicazioni, risulta ridondante rispetto ai gradi di libertà necessari per la stima dei due effetti principali (p-1=2; p=q) e dell'interazione $(p - 1)(q - 1) = (3 - 1)(3 - 1) = 4$, in totale 8 gradi di libertà.

Conseguentemente, poiché quando si considera un notevole numero di fattori, aumenta sia il numero di effetti stimabili che il numero di osservazioni necessario per la loro stima e tra tali effetti vi sono interazioni di ordine superiore al primo, spesso nulle o trascurabili, possiamo validamente sostituire, tramite una opportuna pianificazione sperimentale, un disegno fattoriale frazionale al disegno fattoriale completo originario. Tale scelta comporta una notevole riduzione delle osservazioni e quindi dei costi per la sperimentazione; al tempo stesso il frazionamento deve essere operato secondo criteri specifici che tengano conto di due elementi fondamentali:

1) riduzione del numero di osservazioni sperimentali e, contemporaneamente, valutazione del numero di gradi di libertà necessari per la stima di quegli effetti che si ritiene abbiano influenza e significato nello studio condotto;

2) perfetta identificazione di ciascun effetto e quindi dei *confounding- effects*.

Non possiamo in questo lavoro trattare nel dettaglio i concetti di base dei criteri di frazionamento e quelli per l'identificazione dei *confounding- effects*. Ci limitiamo pertanto a proporre un chiaro e valido esempio di frazionamento (Logothetis e Wynn, 1989) che permette di capire l'importanza di questi disegni, soprattutto nella loro applicazione in campo industriale.

In questo esempio, la matrice (tab.6) relativa al disegno sperimentale fattoriale completo, con tre fattori A B C tutti a due livelli, viene scomposta in due blocchi secondo i due livelli del vettore colonna che identifica l'interazione del II ordine ABC, detto *defining contrast*, tale per cui I=ABC. In questo esempio, il frazionamento descritto risulta l'unico possibile e permette di passare da un disegno completo con 2^3 osservazioni sperimentali a due disegni fattoriali frazionali con 2^2 osservazioni, illustrati in (tab.7) e (tab.8). Il

Table 6: Matrice sperimentale di un disegno fattoriale completo

A	B	C	AB	AC	BC	ABC
-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1
-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1
+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1
+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1
+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

Table 7: Fattoriale frazionale - I blocco

A	B	C	AB	AC	BC	ABC
-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1
-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1
+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1
+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1

disegno corrispondente è un fattoriale frazionale di Risoluzione III[2]. L'unicità della scelta nel frazionamento deriva in questo caso dal fatto che, dovendo garantire almeno la stima non confusa dei tre effetti principali, il numero minimo necessario di gradi di libertà è uguale a tre, tanti quanti sono i gradi libertà resi disponibili da ciascun blocco. L'effetto *confounding* è dovuto al fatto che, frazionando la matrice ortogonale del disegno completo (tab.6), uno stesso vettore colonna, o una sua combinazione lineare, identifica più di un effetto. Per esempio, osservando la tab.8, si nota come A sia confuso con BC, B con AC, C con AB. Ciò significa, analogamente, che stimare A significa stimare $A+BC$; pertanto è necessario presupporre a priori che BC sia trascurabile se al vettore A imputiamo un fattore, e quindi se tramite il vettore colonna si desidera stimare il corrispondente effetto principale.

Quindi è necessario, per poter stimare i tre effetti principali con uno dei due disegni ridotti, ipotizzare che le tre interazioni del I ordine siano nulle o al più trascurabili; oppure, per stimare due effetti principali, per esempio B e C e la loro interazione, si deve imputare l'interazione al vettore colonna relativo ad A.

Si noti infine che l'effetto di confondimento non altera la proprietà di ortogonalità della matrice del disegno, che rimane comunque matrice ortogonale nei disegni fattoriali frazionali a due livelli.

A questo punto, si deve osservare che, stimando tre effetti, in questo caso tutti con un grado di libertà, non si dispone di gradi di libertà per la componente erratica. Si deve pertanto ricorrere alla tecnica del *pooling*, tipico strumento di analisi nel caso di

[2]Con Risoluzione di ordine R si intende un criterio di frazionamento che permette l' individuazione, una volta stabiliti gli effetti da stimare e il corrispondente numero di gradi di libertà, dei *confounding-effects* e della matrice sperimentale corrispondente. Per ulteriori informazioni si veda Box et al. (1978)

Table 8: Fattoriale frazionale - II blocco

A	B	C	AB	AC	BC	ABC
-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

disegni altamente ridotti. Nell'esempio successivo, (Logothetis e Wynn, 1989), i dati e la matrice del disegno (tab.9) illustrano un esperimento che ha come scopo quello di trovare le migliori condizioni per la saldatura elettrica di due lastre di ferro. La variabile di risposta è data dall'efficacia meccanica per le parti saldate, misurata con la forza (kg/mm^2). I fattori considerati sono 4, tutti a due livelli: marca del saldatore A (j100, B17); corrente elettrica B (100A,50A); metodo di manipolazione C (intrecciato, singolo); condizioni di pre-riscaldamento D (non pre-riscaldato, pre-riscaldato a 100° C).

Table 9: Matrice sperimentale e dati per un disegno fattoriale frazionale

A	B	AB	C	AC	BC	D	valori di Y
-1	-1	-1	-1	-1	+1	-1	15
-1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	20
-1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	4
-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	9
+1	-1	+1	-1	+	+1	+1	25
+1	-1	+1	+1	-1	-1	-1	29
+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	10
+1	+1	-1	+1	-1	+1	+1	8

Il disegno fattoriale completo sarebbe stato 2^4, con 16 osservazioni sperimentali. Viene scelto un fattoriale frazionale che permette anche la valutazione di tre interazioni del I ordine[3]. In questo caso i gradi di libertà complessivi sono $8 - 1 = 7$ e quindi deve essere applicata la tecnica del *pooling* per la stima dell'errore. Nella tabella (tab.10) si mostrano i risultati dell'analisi della varianza, ottenuti adottando questo metodo.

La tecnica del *pooling*, molto sempicemente, consiste nel conglobare nella componente erratica (*pooled error*) quegli effetti che in una prima fase della analisi spiegano una percentuale di variabilità complessiva minore del 5%. Nel caso dell'esempio illustrato in (tab.9), come si vede dai risultati, (tab.10), C,D, AC e BC spiegano meno del 4% di devianza totale. Allora il *pooled error*, con 4 gradi di libertà, risulta uguale alla somma delle devianze relative a questi 4 effetti. Si noti che lo svantaggio principale nello scegliere disegni fattoriali frazionali con alta risoluzione risiede nella grande rilevanza che assume l'informazione a priori.

[3]Si noti che tale matrice permetterebbe anche la stima di 7 effetti principali, senza interazioni

Table 10: Risultati dell'analisi della varianza per i dati di tab.9

Fonte var.	Dev.	% Dev.	g.l.	F-value
A	72	-	1	$8.2^{\star}$
B	420.5	-	1	$48.1^{\star\star}$
C	18	3.26	1	-
D	4.5	0.81	1	-
AB	24.5	-	1	2.8
AC	8	1.44	1	-
BC	4.5	0.81	1	-
errore	-	-	-	-
pooled error	35	-	4	-
Totale	552	-	7	-

3 Il controllo di Qualità off-line e la definizione di qualità per Taguchi

Lo scopo principale di questa parte del lavoro è quello di illustrare i principali concetti del controllo di qualità *off-line*, cioè fuori dal ciclo di lavorazione, e dei metodi di Taguchi.

Come è noto (Kackar (1985), Ryan (1989)), dal 1920 ad oggi, nel campo del controllo di qualità si è verificato uno spostamento dell'intervento operativo dalla fase di ispezione, durante la produzione vera e propria, alla fase di progettazione del prodotto o del processo produttivo. Si è quindi effettuato un cambiamento: mentre negli anni '20 il controllo di qualità si effettuava principalmente a livello *on-line*, cioè durante il ciclo di lavorazione, con il passare del tempo, fino ad oggi, il ruolo principale è stato assunto dal controllo *off-line*, ed in particolare nella fase di progettazione del prodotto.

In particolare, i metodi di controllo di qualità *off-line* sono " tecniche di intervento per il controllo dei costi e della qualità effettuate durante gli stadi di progettazione del prodotto o del processo produttivo. Lo scopo principale di tali metodi è quello di migliorare la fabbricazione del prodotto e la sua affidabilità e, al tempo stesso, di ridurre i costi di sviluppo e di manutenzione durante tutta la vita utile del prodotto"(Kackar,1985).

A Genichi Taguchi, ingegnere Giapponese, va fondamentalmente il merito di avere dato impulso al controllo di Qualità *off-line* agli inizi degli anni '80. Questi ha introdotto una metodologia di studio volta sia alla progettazione di prodotti validi, riducendo la variabilità, sia al raggiungimento di processi produttivi più affidabili e stabili. Egli introduce questi metodi nella fase *off-line*[4] proprio per ridurre al minimo il successivo ricorso alle tecniche *on-line*.

L'*American Society For Quality Control* definisce la qualità come " La totalità degli aspetti e delle caratteristiche di un prodotto o di un servizio che influiscono sulla sua

[4]Proprio perchè rivolto ad un intervento in fase di progetto, questo tipo di controllo di qualità viene chiamato da alcuni, più propriamente, miglioramento della qualità. Ryan (1989) definisce questi strumenti $conversational - tools$ invece che $listening - tools$. Sia perché l'intervento avviene a priori, sia perché si tratta di approcci che tendono ad un vero intervento e non solo ad una verifica oggettiva. L'intervento a priori serve a migliorare il prodotto prima che entri in fase di lavorazione e permette di evitare lo scarto del bene.

capacità di soddisfare a determinate richieste". In questo senso il prodotto deve ovviamente soddisfare le richieste materiali e psicologiche del consumatore, ed è quindi interesse del produttore che il prodotto sia quanto più rispondente a tali richieste. Tanto più il prodotto si allontana dalle caratteristiche desiderate quanto più causerà una perdita monetaria, perdita che per Taguchi colpisce la società nel suo complesso.

La definizione di Qualità di Taguchi si discosta notevolmente da quella classica, o comunque dalla definizione di Qualità della *American Society For Quality Control*. Per Taguchi: "La qualità è la perdita che il prodotto causa alla società dall'istante in cui esso lascia la fabbrica, fatta eccezione per le perdite dovute alle sue specifiche funzioni". Le differenziazioni rispetto alla precedente definizione sono innanzitutto dovute al fatto che per Taguchi la qualità è la perdita. Quanto più il prodotto è lontano dalle caratteristiche ottimali richieste quanto più grande sarà la perdita. Inoltre è necessario vedere qual è il significato di perdita (nella qualità). Prima di tutto, per Taguchi, la qualità non è un valore, in quanto la valutazione del valore di un prodotto è una valutazione soggettiva, che compete ai settori di marketing e/o di pianificazione delle vendite, ma è essenzialmente un problema tecnico. In secondo luogo, la perdita nella qualità può essere ristretta a:

1) perdita dovuta a variabilità nel funzionamento;

2) perdita per effetti nocivi.

Per Taguchi un oggetto di buona qualità deve avere piccoli effetti collaterali nocivi e non avere variabilità nelle sue prestazioni tecniche. Il controllo di qualità deve appunto intervenire nella riduzione di questi due tipi di perdite, affinché il prodotto, una volta immesso sul mercato, causi meno perdite possibili alla società[5].

Le caratteristiche di qualità di un prodotto sono costituite dalle caratteristiche finali che definiscono la performance del prodotto per soddisfare i bisogni del consumatore. Per determinare qual è il grado di soddisfazione del consumatore rispetto ad una caratteristica di qualità è necessario determinare qual è il valore ideale, o *target*. Quanto più è ampio lo scostamento rispetto al *target*, quanto più decresce la soddisfazione del consumatore.

Il controllo della variabilità può avvenire a diversi stadi del ciclo di sviluppo di un prodotto. Sinteticamente possiamo suddividere il processo produttivo in tre stadi : disegno del prodotto (*product design*), disegno del processo (*process design*) e la fase di produzione vera e propria (*manifacturing*).

Come si vede in tab.11, la fase di produzione in cui è possibile intervenire per limitare tutti e tre i tipi di variabilità è la fase di disegno del prodotto, che si attua fuori da ciclo di lavorazione, mentre gli altri due stadi (uno sempre in fase *off-line* e l'altro in fase *on-line*) danno possibilità di intervento solo per limitare la variabilità da unità a unità. Taguchi stesso afferma che: "lo studio della qualità nello stadio di disegno del prodotto è particolarmente importante perché, mentre la variabilità può essere ridotta anche durante le fasi di produzione *(manifacturing variations)* , ciò non può avvenire per la deteriorabilità

[5]Taguchi (1991), riferendosi al controllo di prodotti in cui la verifica provoca la distruzione del prodotto, sottolinea come l'introduzione nel mercato di un prodotto, lontano dalle caratteristiche ottimali e vicino ai limiti estremi dell'accettabilità, possa causare perdite maggiori dello scarto del prodotto stesso.

In questa affermazione possiamo individuare la differente impostazione tra Giappone e Stati Uniti nei confronti del controllo di qualità. Per Taguchi, che ha poi ottenuto un notevole riscontro anche negli U.S.A., il prodotto deve essere quanto più vicino alle caratteristiche desiderate, sintetizzate nel *target*. Centrato sul *target* viene definito un intervallo di tolleranza. Se il prodotto, in base ad una caratteristica di "risultato" è fuori da tale intervallo, il prodotto viene scartato. La perdita sarà nulla nel caso di un prodotto "perfetto" e aumenterà a mano a mano che ci allontaniamo dal *target*.

Stadi prod.	var.amb.	deter.to	var.nella prod.
product-design	$\circ$	$\circ$	$\circ$
process-design	$\star$	$\star$	$\circ$
manifacturing	$\star$	$\star$	$\circ$

Table 11: Stadi di sviluppo di un prodotto e possibili interventi; $\circ$=possibilità di intervento;$\star$=non possibilità di intervento

del prodotto *(product deterioration)* o per l'inadeguatezza dell'ambiente *(enviromental variations)*. Tutti questi problemi di qualità, invece, possono essere affrontati negli stadi di progetto".

La variabilità é causata in generale da tre tipi di disturbi: esterni, interni e rumore (*noise*), che sono contraddistinti da specifici fattori, dipendenti dal processo produttivo in esame.

I disturbi esterni (*outer noise factors* per Taguchi) costituiscono le variabili ambientali o le condizioni di uso che alterano la funzionalità del prodotto. Due tipici esempi sono la temperatura e l'umidità.

I disturbi interni (*inner noise factors* per Taguchi) sono disturbi dovuti al deterioramento per l'uso del prodotto o per il lungo tempo di immagazzinamento. Infine, il cosidetto rumore tra unità e unità (*noise factors*) costituisce la fonte di errore accidentale, che provoca la differenza tra i singoli prodotti, riducendone l'affidabilità e l'uniformità.

La buona qualità funzionale di un prodotto è quindi raggiunta quando si riesce a ridurre i tre tipi di disturbo suddetti, in modo tale che il prodotto sia in grado di fornire un buon funzionamento sotto un ampio spettro di condizioni d'uso e ambientali, per tutta la durata della sua vita utile. Anche in questo senso la qualità funzionale viene sintetizzata come scostamento rispetto al valore nominale desiderato, *target*. Per ridurre i tre tipi di disturbo Taguchi propone tre fasi di intervento, che possono essere introdotte in ognuno dei tre stadi del ciclo di sviluppo di un prodotto (tab. 11), ma che sono ovviamente di fondamentale interesse nello stadio di disegno del prodotto. Le tre fasi sono:

1)progettazione del sistema (*system design*);

2)progettazione dei parametri (*parameter design*);

3)progettazione delle tolleranze (*tolerance design*).

Si è tradotto *design* con progettazione per un migliore e preciso significato in italiano. Inoltre, il concetto di parametro, volutamente lasciato, deve per intendersi come "regolazione ottimale del fattore". La prima fase è la fase di individuazione della tecnologia idonea, sulla base di quelle disponibili. All'interno dei possibili sistemi si dovrà sceglierne un piccolo numero, che sarà valutato ed analizzato secondo le tre fasi suddette dal progettista del sistema. La fase di progettazione del sistema è una fase prettamente tecnologica.

La seconda fase, quella di progettazione dei parametri, è indirizzata a trovare la combinazione ottimale dei livelli dei fattori (parametri per Taguchi), che garantisca la riduzione della variabilità, relativamente a tutti e tre i tipi di disturbo considerati.

La terza fase, detta progettazione delle tolleranze, deve essere effettuata soltanto se la seconda fase è risultata inefficace. La fase delle tolleranze viene infatti definita da Taguchi come l'ultima possibilità, in quanto più onerosa. Serve per determinare l'ampiezza degli intervalli di tolleranza per i fattori. Più un fattore è influente nel ciclo produttivo, più piccola sarà l'ampiezza dell'intervallo.

Il nucleo della metodologia innovativa di Taguchi è nella seconda fase, in cui viene introdotto il metodo del progetto sperimentale, o progettazione dei parametri, che descriviamo dettagliatamente nel paragrafo successivo.

4 Parameter Design

Lo scopo principale del Parameter Design (PD) è quello di determinare la combinazione ottimale dei livelli dei fattori del processo produttivo. Per Taguchi tale ricerca della combinazione ottimale dei livelli conduce in generale al miglioramento della qualità e alla riduzione dei costi. Quanto più i livelli dei fattori si discostano da tale situazione ottimale, quanto più l'output (variabile di risposta y) si discosterà dal valore nominale prefissato, producendo una perdita, esprimibile in:

$$L(y) = k(y - \tau)^2 \tag{11}$$

Quindi la combinazione dei livelli dei fattori del disegno è ottimale quando minimizza la perdita attesa, ovvero il rischio.

La creazione di un sistema produttivo così fatto garantisce la stabilità della qualità rispetto a variazioni esterne (es.: caratteristiche ambientali) ed interne. L'importanza di questa fase non è dovuta soltanto al miglioramento della qualità ma anche alla riduzione dei costi, in quanto vengono utilizzate componenti poco costose. "Partire da componenti poco costose e ridurre la variabilità attorno alla media della caratteristica obbiettivo y, senza incrementare i costi, costituisce una tecnica di progetto nota anche come uso della non-linearità." (Taguchi 1991).

Il PD è basato sullo studio dei fattori coinvolti nel sistema. Abbiamo allora una risposta (output) del processo e più fattori che intervengono nel sistema. La scelta di quali fattori devono essere considerati è dovuta essenzialmente alle conoscenze a priori dello sperimentatore. Ovviamente, non tutti i fattori possono essere considerati, sia perchè alcuni non sono conosciuti, sia perchè l'inclusione di un numero elevato di fattori può creare problemi legati all'interpretazione dei risultati e all'esigua numerosità delle prove.

La distinzione fondamentale dei fattori del disegno è in fattori di controllo e fattori rumore, rispettivamente *controls factors* e *noise factors* per Taguchi.

I fattori di controllo sono le variabili le cui specifiche (livelli) devono essere determinate dal produttore. Ciascuna combinazione dei livelli dei fattori di controllo determina un preciso output. Quanto più la combinazione generica si discosta da quella ottimale, tanto più il valore atteso di Y: $E(Y)$, si discosta da τ.

I fattori rumore possono essere distinti in esterni ed interni. La distinzione è legata a quella già descritta in precedenza tra disturbo interno ed esterno. Dobbiamo osservare che la prestazione di un prodotto (*performance*) può discostarsi dal valore nominale perchè i fattori di controllo sono influenzati da disturbi esterni. In questo caso le deviazioni dal valore nominale sono dovute ad influenze esterne. Se un prodotto è stabile rispetto ad effetti interni sarà stabile anche rispetto a quei disturbi esterni che agiscono su di esso indirettamente.

Un esempio citato da Taguchi ed esposto brevemente anche in Kackar (1985) è quello della gommosità delle caramelle prodotte da una industria giapponese nel 1948. In questa situazione la gommosità della caramella (Y) era influenzata dalla temperatura esterna (fattore di disturbo esterno). La caramella migliore, nel senso della qualità del prodotto, era quella che meno risultava influenzata dalla temperatura esterna. Venne quindi ricercata la combinazione ottimale dei 10 fattori (ingredienti) che componevano la caramella, in modo da rendere la sua gommosità meno sensibile alla temperatura esterna.

La fase del PD può articolarsi nei seguenti punti:(Kackar 1985)

1) identificazione iniziale sia dei fattori del disegno che dei fattori rumore, e determinazione dei relativi campi di variazione;

2) costruzione del disegno sperimentale, articolato in matrice del disegno (interna) e matrice rumore (esterna);

3) conduzione dell'esperimento e valutazione del *Signal-to-Noise Ratio* (SN), detto anche *performance statistic*, per ciascuna prova sperimentale; il SN può essere definito come una misura di prestazione, che si differenzia, come vedremo, secondo la situazione sperimentale analizzata;

4) utilizzo dei valori del SN per determinare la combinazione ottimale dei fattori del disegno;

5) verifica dell'effettivo miglioramento apportato dal risultato della fase precedente.

I 5 punti sopra delineati descrivono sommariamente l'intera procedura del PD. La fase (1) di identificazione e separabilità dei fattori presuppone l'esistenza di conoscenze a priori.

La fase iniziale di scelta dei fattori e della loro distinzione in gruppi separati è fondamentale nel metodo di Taguchi. Ad una primaria distinzione tra fattori di controllo e fattori rumore (Taguchi 1991) troviamo in letteratura distinzioni più sottili. Kackar (1985) specifica che dati due insiemi di parametri: $\theta = (\theta_1, ..., \theta_k)$ e $w = (w_1, ..., w_l)$, i primi fattori di controllo e i secondi fattori rumore, la variabile di risposta è funzione di entrambi questi insiemi:

$$Y = f(\theta, w) \tag{12}$$

L'insieme dei valori assunti da θ è contenuto in Θ, spazio dei parametri. Allo stesso tempo w è contenuto in Ω, detto *noise space*. La separazione tra i due distinti gruppi di fattori permette di effettuare le prove del disegno sperimentale. Infatti, condizionatamente ai fattori di controllo vengono ripetute le replicazioni secondo differenti combinazioni dei livelli dei fattori rumore w, in modo da ottenere più replicazioni per ogni osservazione sperimentale.

Una separazione tra fattori ancora più sottile è descritta in Vedaldi (1992) ed è quella da noi adottata. Distinguiamo in questo caso tra fattori di controllo (c) e fattori di aggiustamento (a), che complessivamente danno luogo all'insieme dei parametri θ:

$$\theta = (a, c);$$

pertanto lo spazio Θ si suddivide in due sottospazi A e C, rispettivamente dei fattori di aggiustamento e dei fattori di controllo, detti anche spazi ammissibili.

Questa distinzione generale tra fattori di controllo e fattori di aggiustamento permette di esprimere il metodo di Taguchi in quella procedura a due passi che prima minimizza la variabilità dei fattori di controllo; successivamente, condizionatamente a quei valori di c per cui la dispersione è minima, regoliamo i fattori di aggiustamento a in modo tale da avere il valore atteso di Y quanto più vicino possibile al *target*. Vedaldi (1992) puntualizza che i fattori di controllo non minimizzano solo la variabilità ma possono anche influire su $E(Y)$. In generale la (12) diventa:

$$Y = T(w; a, c) = \mu(a, c) + f[\mu(a, c)]\varepsilon(w, c) \qquad \forall c \ \epsilon \ C \tag{13}$$

con

$$E(Y) = \mu(a, c);$$
$$var(Y) = f^2(\mu(a, c))\sigma^2(c),$$

in cui

- Y è una variabile di output, che esprime il risultato dell'esperimento;
- T rappresenta una qualsiasi funzione di trasferimento.
- (a, c) è un insieme di fattori e/o covariate, i cui effetti sono introdotti nel disegno sperimentale;
- ε è una componente casuale che esprime la variabilità accidentale.

Si deve tenere presente che in Taguchi anche la componente accidentale viene strutturata in una matrice in cui fattori rumore w sono trattati come fattori ad effetti fissi, in quanto supposti controllabili e misurabili.

La caratteristica peculiare del modello in questo contesto è la relazione che esiste tra componente deterministica, data da:

$$\mu(a, c)$$

e dalla parte relativa alla variabilità, genericamente indicata con V.

Nel caso infatti di una relazione additiva tra media e varianza , il modello, detto additivo, è così esprimibile:

$$\begin{aligned} Y &= \mu(a, c) + V \\ V &= \sigma(c)\varepsilon(w) \end{aligned} \tag{14}$$

La componente $f[\cdot]$ in (13) è supposta unitaria.

Nel caso invece di una relazione moltiplicativa tra media e varianza, si ha:

$$\begin{aligned} Y &= \mu(a, c)[1 + (V)] \\ V &= \delta(c)\varepsilon(w) \end{aligned} \tag{15}$$

dove δ è il coefficiente di variazione e la f in (13) è supposta uguale alla funzione identità. In entrambi i modelli $\varepsilon(w)$ è variabile aleatoria tale che $E(\varepsilon) = 0$ e $var(\varepsilon) = 1$.

Si hanno quindi due modelli principali in cui il centro di interesse è costituito dalla relazione tra E(Y) e la varianza del processo, data da $var(Y)$.

Due sono le osservazioni che derivano da queste considerazioni.

La prima è che la relazione tra media e varianza è importante in quanto l'obiettivo principale del controllo di qualità è quello di minimizzare la varianza del processo e successivamente cercare di avvicinare le caratteristiche del prodotto, misurate da Y, quanto più possibile al valore di *target*, $E(Y) \to \tau$. La seconda è che tra i due modelli il modello moltiplicativo (15) risulta quello che attrae maggiormente il nostro interesse. Sia perché più usuale nella realtà, sia perché è con questo tipo di relazione che emergono le problematiche più importanti, sia in Taguchi che in generale, anche in relazione al problema della separabilità dei fattori.

Ricordando la distinzione fatta in precedenza tra fattori rumore interni ed esterni, corrispondenti ai relativi disturbi, entrambi questi due insiemi sono contenuti in w di (13). I fattori c sono strettamente fattori di controllo ed hanno effetto diretto su μ e sulla dispersione, mentre hanno un effetto indiretto sulla varianza di Y. I fattori di aggiustamento a influiscono invece solo sul valore atteso, mentre non hanno nessuna influenza sulla dispersione ed una influenza solo indiretta sulla varianza di Y. Questa influenza è indiretta perchè si attua tramite una generica funzione f.

Avremo modo successivamente di parlare più dettagliatamente di ciò che comporta la distinzione tra fattori. Qui ci limitiamo a puntualizzare che la procedura a due passi di Taguchi, che dovrebbe minimizzare la funzione di perdita, si basa essenzialmente su tale separazione dei fattori.

Una volta che le conoscenze a priori e altri esperimenti dello stesso tipo hanno fornito le informazioni necessarie per determinare la separazione dei fattori ed il corrispondente campo di variazione per ciascuno di essi, si procede alla costruzione del piano sperimentale. Taguchi propone un *design product* o piano sperimentale incrociato (Magagnoli 1992), in cui i disegni descritti in precedenza (par.2) costituiscono l'elemento di base. Il piano complessivo è suddiviso in due matrici, entrambe ortogonali. Una, detta matrice interna, relativa ai fattori c di controllo; l'altra, detta matrice esterna, relativa ai fattori di disturbo w. La matrice interna è una matrice nella quale ogni riga rappresenta una prova sperimentale, una per ciascuna combinazione dei livelli dei fattori di controllo.

Per ciascuna prova vengono effettuate più replicazioni, il cui disegno sperimentale è rappresentato dalla matrice esterna. Questa permette la stima della variabilità accidentale, ammesso che le replicazioni siano delle vere replicazioni. Se fossero soltanto delle osservazioni consecutive invece che delle replicazioni ottenute secondo uno specifico criterio di randomizzazione, la misura dell'errore non sarebbe appropriata (Pignatiello Jr. e Ramberg, 1985).

La struttura del piano sperimentale di Taguchi è anche detta prodotto diretto (*direct product*), in quanto per ogni prova si ha il prodotto tra le due matrici. Per esempio, nel caso di un piano con 9 combinazioni e 4 replicazioni per ogni combinazione, la matrice interna avrà dimensione [9x4] se 4 sono i fattori di controllo; ciascuna matrice esterna avrà dimensione [4x3] se 3 sono i fattori di disturbo. Abbiamo complessivamente 36 osservazioni sperimentali.

La matrice esterna è ovviamente uguale per ogni combinazione sperimentale, in modo da poter essere una misura della variabilità accidentale. Per ogni replicazione otteniamo un valore della variabile di risposta Y. La determinazione della matrice interna deve essere tale da offrire il massimo dell'informazione con il minimo numero di prove, e quindi, successivamente, trovare quella combinazione ottimale dei livelli dei fattori che massimizza la misura di prestazione.

Come abbiamo detto, se da un lato il disegno sperimentale di Taguchi può essere ricondotto ai disegni fattoriali frazionali e ad altri disegni classici, al tempo stesso si devono fare alcune considerazioni.

Prima di tutto l'importanza che Taguchi dà all'uso di disegni sperimentali meno teorici e di più ampio respiro applicativo. Inoltre egli si inserisce in un contesto occidentale in cui il disegno sperimentale è improntato ad un ruolo passivo nel controllo di qualità piuttosto che ad un intervento attivo, come invece Taguchi auspica.

È nostra opinione ribadire questa importanza, anche alla luce di un possibile ciclo di analisi in cui modello ed esperimento vengono ad essere in continua relazione, come avviene con la Metodologia delle Superfici di Risposta (Myers et al., 1992). Inoltre un disegno sperimentale opportuno può ridurre notevolmente i costi e migliorare l'informazione. Si pensi a questo riguardo ad un livello di frazionamento piuttosto di un altro. Inoltre, il procedere all'analisi delle prove sperimentali tramite ANOVA pu considerarsi limitante rispetto alle Superfici di Risposta, dove le prove sperimentali (la selezione di punti sulla superficie) sono analizzate con modelli polinomiali nel continuo. Questo ovviamente implica che anche i fattori, oltre alla Y, siano tutti di natura quantitativa. L'introduzione eventuale di fattori qualitativi deve pertanto essere tenuta in particolare considerazione nelle fasi successive di analisi e ottimizzazioone.

La minimizzazione della variabilità è uno dei punti innovativi in Taguchi rispetto ad altri metodi di controllo della tolleranza. La costruzione del disegno sperimentale basato su due matrici ortogonali, una interna ed una esterna, permette la separazione di due tipi di variabilità. Una componente attribuibile ai fattori di controllo che più propriamente può definirsi come la parte della variabilità dovuta ai fattori influenti sul prodotto, per esempio lo spessore di una lamiera, la misura di uno strumento o di una parte del prodotto. Questi fattori vengono strutturati nella matrice interna ed i loro effetti sono trattati come effetti fissi. La matrice ortogonale esterna viene invece utilizzata proprio per quei fattori rumore, relativi alla variabilità accidentale, i cui effetti costituiscono la componente casuale vera e propria. Ecco quindi il punto di differenziazione tra il disegno sperimentale di Taguchi e il disegno classico. In quest'ultimo gli effetti dei fattori sono studiati secondo un disegno sperimentale similare a quello della matrice interna di Taguchi ma la componente casuale viene stimata come componente residua, una volta che sono state valutate le componenti di varianza, relative agli effetti dei fattori considerati. Nel disegno di Taguchi la componente casuale dell'errore viene a sua volta strutturata in una matrice, quella esterna, in relazione ad un insieme di fattori rumore, considerati anch'essi ad effetti fissi. Quindi, se a livello teorico il rumore è considerato componente casuale, a livello empirico viene trattato da Taguchi in modo deterministico, con ulteriore "spiegazione", e quindi riduzione, della componente residua.

Possiamo allora affermare che il disegno sperimentale classico si fonda sullo studio dei fattori di controllo e imputa all'errore accidentale quello che Taguchi cerca di controllare tramite la matrice esterna ed i fattori rumore.

Per ottenere la minimizzazione della variabilità diventa importante per Taguchi la distinzione tra fattori rumore e fattori di controllo. La robustezza del prodotto è legata alla robustezza dei fattori controllo rispetto ai fattori rumore. Quindi particolare importanza assume la componente di interazione tra questi due gruppi di fattori.

Successivamente, una volta ottenuta la minimizzazione della variabilità e quindi la robustezza dei fattori controllo rispetto ai fattori *noise*, si procede alla regolazione definitiva dei fattori, per avvicinarsi quanto più possibile al valore *target*.

Successivamente alla costruzione del piano sperimentale ed alla effettuazione delle prove viene calcolata la misura di prestazione, (SN). Kackar (1985) afferma che Taguchi ha definito più di 60 SNs, ed ognuno può essere considerato uno stimatore di una *performance measure* del processo. La scelta del tipo di SNs da utilizzare è dipendente dal tipo di situazione che si crea all'interno del processo. In generale le tre misure di prestazione più note sono riconducibili a tre situazioni, denominate *Smaller the Better* (STB), *Larger the Better* (LTB), *Nominal the Best* (NTB).

Smaller the better o "più piccolo è meglio", è la situazione in cui il valore obbiettivo è dato dal minimo valore possibile per la variabile di risposta. Il *target* espresso da τ è in questo caso uguale a zero. Per esempio, quando l'obbiettivo è la riduzione, o addirittura l'annullamento, delle impurità oppure delle emissioni nocive. In questo caso il SN, indicato con η_s, è dato da:

$$\eta_s(a, c) = -10log_{10}E(Y^2) \tag{16}$$

con il corrispondente stimatore:

$$\hat{\eta_s}(a, c) = -10log_{10}\sum(y_i^2/n) \tag{17}$$

Data l'espressione di (16) è facile verificare che il miglioramento sarà ottenuto quando, condizionatamente ai valori dei fattori di controllo e di aggiustamento, η_s tenderà ad un grande valore e quindi viene massimizzato. Infatti la funzione logaritmo, per $y \to 0$, tende a $-\infty$ e quindi $\eta_s \to +\infty$.

La situazione *Larger the better*, ovvero "Più grande è, meglio" si ravvisa allorché il valore obbiettivo è il più grande possibile, per esempio la capacità di accelerazione, oppure la resistenza di una biella. In questo caso il SN è dato da:

$$\eta_l(a, c) = -10log_{10}E(1/Y^2) \tag{18}$$

con il corrispondente stimatore:

$$\hat{\eta_l}(a, c) = -10log_{10}\sum(1/y_i^2)/n \tag{19}$$

e pertanto, se $y \to +\infty$, avremo che $E(1/Y^2) \to 0$ e quindi anche in questo caso otterremo la massimizzazione del SN.

Il caso *Nominal the Best* è la situazione in cui si persegue un valore preciso, appunto il valore *target*. È questo il caso principale in cui si effettua la procedura a due passi di Taguchi, regolando i fattori di aggiustamento condizionatamente a quei valori di c che minimizzano la dispersione, e trovando quella combinazione ottimale che minimizza lo scostamento dal *target* e quindi $L(y)$. Dato quindi un valore ideale di τ diverso da zero e da ∞, il SN è in questo caso dato dall'inverso del coefficiente di variazione al quadrato. Si ha infatti:

$$\hat{\eta_N}(a, c) = 10log_{10}[E^2(Y)/var(Y)] \tag{20}$$

con il corrispondente stimatore:

$$\hat{\eta_N}(a, c) = 10log_{10}[(\bar{y})^2/s^2] \tag{21}$$

che sarà massimizzato quando si ottiene il minimo valore di s^2 [6].

Soltanto nel caso *Nominal the Best* i fattori di aggiustamento assumono una connotazione precisa, proprio in funzione di τ. Nel caso in cui $\tau = \tau_0$, la perdita attesa può essere così formulata:

$$E(L(y)) = E[(y - \tau_0)^2] = E(y)^2 + (\mu(a, c) - \tau_0)^2 \tag{22}$$

[6] Con s^2 si indica la stima campionaria di $var(Y)$.

Il valore atteso della perdita quadratica non è altro che l'Errore Quadratico Medio; il primo termine a destra nella (22) è la varianza, mentre il secondo termine rappresenta la distorsione $\Delta(a, c)$ del valore atteso di Y rispetto al valore nominale perseguito.

Kackar (1985) distingue due situazioni, che possiamo ricondurre al modello additivo e al modello moltiplicativo. Nel primo caso la varianza non interagisce con la media, nel secondo caso invece la dispersione e la media sono interdipendenti. Il caso in cui la dispersione cresce linearmente con la media ci riconduce al caso di coefficiente di variazione costante.

Nel caso di modello additivo la distorsione $\Delta(a, c)$, dovuta allo scostamento tra μ e τ, e la dispersione, sono tra loro indipendenti e possono essere regolate separatamente. Nel caso di un modello moltiplicativo, invece, la media e la dispersione sono tra loro connesse e possono essere regolate tramite il SN del caso *Nominal the Best* mentre la distorsione $\Delta(a, c)$ rimane indipendente dal coefficiente di variazione e può quindi essere regolata separatamente. Quindi, nel caso di "Un valore preciso è il migliore", la separabilità dei fattori diventa una condizione importante (necessaria) affinché si possa raggiungere la massimizzazione di η_N e la conseguente regolazione di μ vicino a τ_0.

La giustificazione dell'uso del SN addottata da Taguchi è piuttosto semplice. Taguchi afferma che l'uso del SN è migliore in generale, per esempio per calibrare misure tendenti ad assumere valori troppo alti o troppo bassi; se anche non si verifica una situazione in cui è necessario l'utilizzo del SN, la misura di prestazione non crea problemi. Infatti, qualora si verificasse per ogni prova sperimentale la coincidenza tra la media parziale stimata e μ, si avrebbe una costante al numeratore ed il SN si ridurrebbe ad un valore proporzionale a σ^2.

Una volta definito il SN prescelto, in base alla situazione reale, questo viene stimato per ogni prova sperimentale. L'analisi della varianza (par.1) viene condotta sia per sapere quali sono i fattori di controllo, sia, successivamente, per identificare quelli di aggiustamento. I primi devono risultare significativi per il SN, i secondi per la variabile di risposta Y. In questa fase vengono identificati i livelli che danno luogo alla combinazione ottimale. Un buon esempio di applicazione del metodo di Taguchi si ha in Pignatiello Jr. e Ramberg (1985), Phadke et alt.(1983). In Taguchi (1991) si ha anche un breve esempio di come la sua metodologia possa essere applicata anche per caratteristiche dinamiche, quali, per esempio, le caratteristiche di guida di un veicolo.

È chiaro che proprio dalla definizione e distinzione tra fattori di controllo e di aggiustamento si ha che l'individuazione dei primi dipende dalla analisi della varianza condotta sui valori del SN calcolati, per ciascuna combinazione sperimentale, sulle replicazioni effettuate secondo la matrice esterna; mentre i fattori di aggiustamento, procedendo alla regolazione di $E(Y)$ al *target* τ, vengono identificati assumendo le medie parziali, calcolate sulle replicazioni per ciascuna combinazione sperimentale, come variabile di risposta, nel caso NTB.

Una volta che si sono individuati quali sono i fattori di controllo e quali quelli di aggiustamento, sulla base della matrice interna e dei vettori colonna relativi a ciascun effetto, si procede al calcolo, secondo i livelli, del valor medio e del SN. In tal modo, secondo la situazione sperimentale iniziale, si sceglierà per quello specifico effetto il livello che massimizza il SN, se il fattore è di controllo, o che minimizza, massimizza o si avvicina a τ_0, se il fattore è risultato di aggiustamento e la situazione sperimentale è, rispettivamente, *Smaller the Better*, *Larger the Better*, *Nominal the Best*.

Per esempio, in relazione alla matrice interna prima presentata, supponiamo che A sia risultato fattore di aggiustamento; allora si procederà al calcolo dei valori medi della Y, distinguendo secondo i tre livelli di A. Se, per esempio, il caso sperimentale è *Larger the Better* si prenderà il livello che massimizza la Y. Parallelamente, se B è risultato fattore di controllo, si procederà alla stima dei valori medi di $\eta_l(a,c)$ secondo i tre livelli di B e si sceglierà quel livello di B che massimizza il SN. Si noti come il metodo di Taguchi si fondi sull'analisi della varianza prescindendo dalle ipotesi specificate all'inizio del lavoro. Se da un lato l'ipotesi di normalità può essere verificata nella maggior parte dei casi, lo stesso non può dirsi per l'ipotesi di omoschedasticità. È questo uno dei maggiori limiti metodologici sollevato dalla letteratura specifica al PD. Infatti il controllo di qualità in fase di progettazione si pone l'obiettivo di controllare la variabilità del processo in esame ed il metodo di Taguchi utilizza una metodologia statistica che si fonda sull'omogeneità della varianza. In tal senso si sono avute proposte di metodi statistici alternativi che, sulla base del criterio generale del PD, ne migliorano vari aspetti, si veda al riguardo, Berni (1996); Berni e Farini (1999).

Il seguente esempio di applicazione del PD è tratto da Boari (1992). L'esperimento riguarda un problema relativo alla saldatura a punti, ovvero la deformazione delle parti durante il processo di saldatura. La situazione sperimentale è del tipo *Smaller the Better*, con l'obiettivo di minimizzare la distorsione, che è ritenuta sotto controllo se risulta inferiore ad 1 mm. I fattori considerati nell'esperimento, 7 fattori tutti a due livelli, sono illustrati in (tab.12).

Table 12: Descrizione fattori

	fattore	liv.1	liv.2
A	assetto	1	2
B	spessore contatti	3mm	5mm
C	sequenza punti	12345	15243
D	spaziatura	20mm	30mm
E	flangia	10mm	15mm
F	spessore L	.75mm	1mm
G	spessore I	1mm	1.5mm

La matrice interna è equivalente a quella illustrata in tab.9, anche se in questo caso si stimano tutti e 7 gli effetti principali ed il disegno è un fattoriale frazionale 2^{7-4}_{III}. La matrice esterna è costituita da 10 replicazioni per ogni combinazione sperimentale della matrice interna. Non presentiamo i valori originari ma i valori medi e quelli del SN, calcolati per ogni combinazione. I dati sono illustrati in tab.13 e tab.14.

Inoltre, per ciascuna combinazione sperimentale, indipendentemente dai fattori, è necessario calcolare sia il valor medio $\bar{y}_i; i = 1, ..., 8$ e il valore del SN $\bar{SN}_i; i = 1, ...8$. Ricordiamo che questi valori (tab.14) sono necessari per l'applicazione dell'analisi della varianza, necessaria per l'individuazione dei fattori di controllo e di aggiustamento, anche se nel caso STB l'individuazione dei fattori di aggiustamento avviene su tutte e 80 le osservazioni.

Omettiamo, per brevità, di presentare i risultati completi di analisi della varianza. Sottolineiamo soltanto che, per l'individuazione dei fattori di aggiustamento risultano altamente significativi ($\alpha < 0.01$):A, B e G; mentre gli stessi fattori risultano significa-

Table 13: Media per livelli, per ciascun fattore

fattore	media liv.1	media liv.2
A	79.87	93.17
B	75.92	97.12
C	85.8	87.25
D	84	89.05
E	85.57	87.47
F	89.62	83.42
G	96.15	76.9

Table 14: Valori medi del SN per livelli, per ciascun fattore

fattore	SN liv.1	SN liv.2
A	-37.9	-39.36
B	-37.56	-3969
C	-38.52	-38.74
D	-38.43	-38.83
E	-38.66	-38.60
F	-39.02	-38.23
G	-39.62	-37.63

tivi nell'analisi della varianza condotta per l'identificazione dei fattori di controllo. Più precisamente si ha per A *p-value*= 0.034, per B *p-value*= 0.010, per G *p-value*= 0.012; nel caso del SN è stato necessario applicare la tecnica del *pooling* prima descritta (par.2) per poter valutare la componente erratica.

A questo punto non rimane che individuare la combinazione ottimale in relazione ai soli tre fattori che sono risultati significativi. È immediato rilevare come, anche per questo semplice esempio, si sia verificato il problema della NON separabilità dei fattori. A, B e G risultano infatti fattori sia di controllo che di aggiustamento. Questo problema nel PD si presenta molto spesso, anche perché, come ha rilevato Box (1988) le tre misure di prestazione non possono essere considerate, come invece ritiene Taguchi, misure per la dispersione poiché al loro interno si confondono dispersione e locazione. Metodi alternativi a Taguchi hanno cercato di risolvere, prima di tutto, proprio questo limite.

In questo caso per l'individuazione della combinazione ottimale si ottiene:
per i fattori ritenuti di controllo:

$$A = 1; B = 3mm; G = 1.5mm;$$

per i fattori ritenuti di aggiustamento:

$$A = 1; B = 3mm; G = 1.5mm.$$

E' chiaro che una analisi con questo risultato finale non puó dirsi conclusa, ne' soprattutto valida. Metodi alternativi, come la metodologia delle superfici di risposta o i

Table 15: Valori della Media, per ciascuna combinazione sperimentale

Comb.sp.	Media
1	77.8
2	59.3
3	75
4	107.4
5	75.2
6	91.4
7	108
8	98.1

Modelli Lineari Generalizzati, possono offrire soluzioni piú idonee mantenendo intatta la proposta teorica di Taguchi.

References

Berni R., *Generalized Linear Models as an alternative approach to the Taguchi's two-step procedure,* Statistica Applicata, Italian Journal of Applied Statistics, vol.(8) 4, pp.:769-786, 1996.

Berni R., Farini L., *Location and dispersion effects in off-line quality control,* Statistica Applicata, Vol. 11 n.l, pagg. 59-75, 1999.

Boari, *in: Vedaldi R. & Magagnoli U. & Boari (1992).* Box G.E.P., *Signal To Noise Ratios, Performance Criteria and Transformations,*Technometrics, vol.(30) 1, 1988.

Box G.E.P. & Hunter & Hunter J.S., *Statistics for Experimenters,*J.Wiley, 1978.

Cochran W.G. & Cox G.M., *Experimental Design,* J.Wiley, 1957.

Cox D.R., *Planning of Experiments,* J.Wiley,1958.

Hunter J.S., *Statistical Design Applied To Product Design ,* Journal of Quality Technology, vol.(17) 4, 1985.

Kackar R.N., *Off-Line Quality Control,Parameter Design and The Taguchi Method,* Journal of Quality Technology, vol.(17) 4, 1985.

Logothetis & Wynn, *Quality Through Design,* Oxford, Clarendon Press, 1990.

Magagnoli U., *in: Vedaldi R. & Magagnoli U. & Boari (1992).*

Magagnoli U. & Vedaldi R., *I metodi di Taguchi: Valutazioni sui Fondamenti Metodologici,* Riunione Scientifica della S.I.S., 1990.

Montgomery D.C., (1991), *Design and analysis of experiments,* J.Wiley &Sons.

Myers R.H. & Khuri A.I. & Vining G., *Response Surface Alternatives to the Taguchi Robust Parameter Design Approach,* The American Statistician, vol.(46) 2, 1992.

Nelder J.A. & Lee Y., *Generalized Linear Models for the Analysis of Taguchi-Type Experiments ,* Applied Stochastic Models and Data Analysis, vol.(7) , 1991.

Phadke M.S. & Kackar R.N. & Speeney D.V. & Grieco M.J., *Off-line quality control in integrated circuit fabrication using experimental design*, The Bell System Techni-

cal Journal, vol.(62) 5, 1983.
Pignatiello Jr. J.J. & Ramberg J.S., *in: Discussion on Kackar (1985)*, Journal of Quality Technology, vol.(17) 4, 1985.
Ryan T.P., *Statistical methods for quality improvement*, John Wiley & Sons, 1989.
Salvi F. & Chiandotto B.(a cura di), *Biometria*, Piccin editore, 1978.
Taguchi G., *Introduzione alle tecniche per la qualità; progettare qualità nei prodotti e nei processi*, Franco Angeli/Azienda Moderna, 1991.
Vedaldi R., *in: Vedaldi R. & Magagnoli U. & Boari (1992).* Vedaldi R. & Magagnoli U. & Boari, *Introduzione ai Metodi di Taguchi* , Riunione Scientifica della S.I.S., 1992.