FRANCESCA DI IORIO

DIPARTIMENTO DI SCIENZE POLITICHE

UNIVERSITÀ DI NAPOLI FEDERICO II

- MA(1): $X_t = \mu + \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}$ dove $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$
  - $\mathbf{E}(X_t) = \mu$
  - $\gamma(0)$=$\mathbf{E}(X_t - \mu)^2 = (1 + \theta^2)\sigma^2$
  - $\gamma(1)$=$\mathbf{E}[(X_t - \mu)(X_{t-1} - \mu)] = \theta\sigma^2$, e $\gamma(k) = 0 \ \ \forall k > 1$
  - $\rho(1) = \frac{\theta}{1+\theta^2}$, e $\rho(k) = 0$ per k¿1
  - Quindi MA(1) è sempre stazionario e se $\epsilon_t$ è gaussiano MA(1) è ergodico rispetto a tutto i momenti.
  - MA(1) è invertibile se $|\theta| < 1$ infatti:
    $X_t - \mu = (1 + \theta L)\epsilon_t$, se $|\theta| < 1 \Rightarrow (1 + \theta L)^{-1}(X_t - \mu) = \epsilon_t$
- MA(2): $X_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \theta_2\epsilon_{t-2}$ dove $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$
  - $\mathbf{E}(X_t) = \mu$
  - $\gamma(0)$=$\mathbf{E}(X_t - \mu)^2 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2$
  - $\gamma(1)$=$\mathbf{E}[(X_t - \mu)(X_{t-1} - \mu)] = (\theta_1\theta_2 + \theta_1)\sigma^2$, $\gamma(2) = \theta_2$ e $\gamma(k) = 0 \ \ \forall k > 2$
  - $\rho(1) = \frac{\theta_1\theta_2+\theta_1}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$, $\rho(2) = \frac{\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$ $\rho(k) = 0$ per k¿2
  - MA(2) è sempre stazionario e, se $\epsilon_t$ è gaussiano, MA(2) è ergodico rispetto a tutto i momenti.
  - MA(2) è invertibile se $|\theta_2| < 1$ , $\theta_1 + \theta_2 < 1$ e $\theta_2 - \theta_1 < 1$
- MA(q):
  $X_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \theta_2\epsilon_{t-2} + .... + \theta_q\epsilon_{t-q}$, $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$
  - $\mathbf{E}(X_t) = \mu$
  - $\gamma(0)$=$\mathbf{E}(X_t - \mu)^2 = (1 + \theta_1^2 + ... + \theta_q^2)\sigma^2$
  - $\gamma(k) = \mathbf{E}[(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu)] = (\theta_k + \theta_{k+1}\theta_1 + ... + \theta_q\theta_{q-k})\sigma^2$ per k=1,2,...q
  - $\gamma(k) = 0 \ \ \forall k > q$
  - MA(q) è sempre stazionario e se $\epsilon_t$ è gaussiano MA(q) è ergodico rispetto a tutto i momenti.

- AR(1):
$X_t = c + \phi X_{t-1} + \epsilon_t$, $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2) \Rightarrow (1 - \phi L)X_t = c + \epsilon_t$
  - se $|\phi| < 1 \Rightarrow X_t = (1 - \phi L)^{-1}(c + \epsilon_t) = \frac{c}{1-\phi} + \epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_{t-2} + .....$
  - $\mathbf{E}(X_t) = \mu = \frac{c}{1-\phi}$
  - $\gamma(0)$=$\mathbf{E}(X_t - \mu)^2 = \mathbf{E}(\frac{c}{1-\phi} + \epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_{t-2} + .....)^2 = \frac{\sigma^2}{(1-\phi^2)}$
  - $\gamma$(k)=$\mathbf{E}[(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu)] = \sigma^2\frac{\phi^k}{(1-\phi^2)}$, k=1,2,...
  - $\rho(k) = \phi^k$ il cui andamento dipende dal valore di $\phi$
  - moltiplicatore o funzione di impluso-risposta
  $$\frac{\partial X_t}{\partial \epsilon_{t-k}} = \phi^k$$
  da cui: AR(1) è stazionario se $|\phi| < 1$
  - Quindi AR(1) è invertibile per definizione, è stazionario ed ergodico per la media se $|\phi| < 1$

- AR(2):
$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t$, $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2) \Rightarrow (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)X_t = (c + \epsilon_t)$
  - $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)$ per poter scrivere
  $X_t = (1 - \lambda_1)^{-1}(1 - \lambda_2)^{-1}(c + \epsilon_t)$
  - $\lambda_1$ e $\lambda_2$ si trovano risolvendo l'equazione $(1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2) = 0$
  - si dimostra inoltre che
  $$\frac{\partial X_t}{\partial \epsilon_{t-k}} = \frac{\lambda_1^{k+1} + \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$
  il cui comportamento dipende dai valori di $\phi_1$ e $\phi_2$ che si trovano nell'espressione di $\lambda_1$ e $\lambda_2$.
  - $\mathbf{E}(X_t) = \mu = \frac{c}{1-\phi_1-\phi_2}$
  - $\gamma(0)$=$\mathbf{E}(X_t - \mu)^2 = \frac{\sigma^2(1-\phi_2)}{(1+\phi_2)[(1-\phi_2)^2-\phi_1^2]}$
  - AR(2) è stazionario se tutte le radici di $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 = 0$ sono **esterne** al cerchio unitario : $\phi_1 + \phi_2 < 1$, $\phi_2 - \phi_1 < 1$, $|\phi_2| < 1$

- AR(p):
  $X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2}.... + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t$, $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$
  - il processo è stazionario se tutte le radici di $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - .... - \phi_p z^p = 0$ sono **esterne** al cerchio unitario
  - $\mathbf{E}(X_t) = \mu = \frac{c}{1-\phi_1-\phi_2-....\phi_p}$
  - $\gamma(0) = \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + .... + \phi_p\gamma(p) + \sigma^2$
  - $\gamma(k) = \phi_1\gamma(k-1) + \phi_2\gamma(k-2) + .... + \phi_p\gamma(k-p)$, k=1,2,...
  - ACF dalle equazioni di Yule-Walker
    $\rho(k) = \phi_1\rho(k-1) + \phi_2\rho(k-2) + .... + \phi_p\rho(k-p)$, k=1,2,...
- ARMA(1,1):
  $(1 - \phi_1 L)X_t = c + (1 + \theta_1 L)\epsilon_t$, $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$
  - la stazionarietà dipende dalle radici della parte AR, l'invertibilità da quelle della parte MA
  - $\mathbf{E}(X_t) = \mu = \frac{c}{1-\phi_1}$
  - $\gamma(0) = \sigma^2 \frac{(1+2\phi_1\theta_1+\theta_1^2)}{1-\phi_1^2}$
  - ACF e PACF si comportano come un misto di quelle di AR e MA
  - $\rho(1) = \frac{(1+\phi_1\theta_1)(\phi_1+\theta_1)}{(1+2\phi_1\theta_1+\theta_1^2)}$
  - $\rho(2) = \phi_1\rho(1)$, $\rho(k) = \phi_1\rho(k-1)$
- ARMA(p,q):
  $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2..... + \phi_p L^p)X_t = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2..... + \theta_q L^q)\epsilon_t$, $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$
  - la stazionarietà dipende dalle radici della parte AR, l'invertibilità da quelle della parte MA
  - $\mathbf{E}(X_t) = \mu = \frac{c}{1-\phi_1-\phi_2-....\phi_p}$
  - ACF e PACF si comportano come un misto di quelle di AR e MA
- l'algebra dei processi arma è non banale; casi semplici: MA(q)+MA(s)=MA(max(q,s))
  $AR(p_1) + AR(p_1) = ARMA(p_1 + p_2, max\{p_1, p_2\})$