Compiti tematici capp. 5,6

a cura di Giovanni M. Marchetti

2016 ver. 0.6

Indice

1.

Se X e Y sono due variabili casuali independenti, quale delle seguenti uguaglianze è vera?

A) $E(2X + 3Y) = 5\,E(X + Y)$
B) $\text{var}(2X + 3Y) = 2\text{var}(X) + 3\text{var}(Y)$
C) $\text{var}(2X + 3Y) = 4\text{var}(X) + 9\text{var}(Y)$
D) $E(2X + 3Y) = E(X) + E(Y) + 5$.

Soluzione. A) Falsa: $E(2X + 3Y) = 2E(X) + 3E(Y)$.

B) Falsa: $\text{var}(2X + 3Y) = 4\text{var}(X) + 9\text{var}(Y)$

C) Vera.

D) Falsa.

2.

(Richiede la conoscenza dell'ipergeometrica). In una partita di 18 autocarri, ce ne sono 4 senza aria condizionata. Se ne estraggono 4 a caso. Qual è la probabilità al più due siano senza aria condizionata?

Soluzione. L'estrazione è senza ripetizione perché il testo dice la numerosità della popolazione da cui si estrae e il campione è piccolo. Qui (X =) numero di autocarri senza aria condizionata sul 4 estratti. Pertanto, X ha distribuzione ipergeometrica. Quindi:

$$P(X = 3) = \frac{\binom{S}{3}\binom{N-S}{n-3}}{\binom{N}{n}}$$

e anche

$$P(X = 4) = \frac{\binom{S}{4}\binom{N-S}{n-4}}{\binom{N}{n}}$$

La probabilità chiesta è $P(X \leq 2) = 1 - P(X = 3) - P(X = 4)$. Quindi si calcola

$$P(X = 3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{14}{1}}{\binom{18}{4}} = \frac{4 \times 14}{3060} = 0.0183$$

$$P(X = 4) = \frac{\binom{4}{4}\binom{14}{0}}{\binom{18}{4}} = \frac{1 \times 1}{3060} = 0.000326797.$$

Quindi $P(X \leq 2) = 1 - 0.0183 - 0.0004 = 0.9813$.

3.

Se X e Y sono due variabili casuali indipendenti, quale delle seguenti uguaglianze è falsa? A) $\text{cov}(X, Y) = 0$ B) $\text{var}(X - Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$ C) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ D) $\text{cov}(X, Y) = 1$.

Soluzione. A) Vera: se X e Y sono indipendenti sono anche incorrelate. B) Vera: perché $\text{var}(X - Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) - 2\text{cov}(X, Y)$ C) Vera. D) Falsa.

4.

Un' indagine ha rilevato che il 40% dei controllori di volo ritiene il proprio lavoro molto stressante. Supponi che 12 controllori di volo siano selezionati casualmente. Qual è la probabilità che almeno 2 di loro ritengano il proprio lavoro molto stressante?

A) 0.7218
B) 0.2806
C) 0.9804
D) 0.0282

Soluzione. Qui si suppone che selezionare casualmente 12 controllori da una popolazione (di numerosità ignota) sia equivalente a fare 12 prove di Bernoulli indipendenti con probabilità 0.4 di selezionare uno stressato. Il numero X di controllori di volo stressati su 12 è quindi binomiale.

$$X = \# \text{ stressati su } 12 \sim \textit{Binomiale}(12, p = 0.4)$$

Quindi la probabilità che almeno 2 due di loro siano stressati su 12 è

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

Quindi si usa la formula della probabilità Binomiale:

$$1 - \binom{12}{0}(0.4)^0(0.6)^{12} - \binom{12}{1}(0.4)^1(0.6)^{11} = 1 - 0.6^{12} - 12(0.4)(0.6^1 1) = 0.9804.$$

5.

Data la distribuzione di probabilità

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(x)$	0.05	0.16	0.19	0.24	0.18	0.11	0.03	0.04

Quali delle seguenti affermazioni è vera?

A) $P(X \geq 3) = 0.64$
B) $P(2 < X < 5) = 0.42$
C) $P(X > 6) = 0.07$
D) $P(X \leq 6) = 0.93$.

Soluzione.

A) $P(X \geq 3) = 1 - (0.05 + 0.16 + 0.19) = 0.6$. Falso.
B) $P(2 < X < 5) = p(3) + p(4) = 0.24 + 0.18 = 0.42$. Vero.
C) $P(X > 6) = 0.04$. Falso.
D) $P(X \leq 6) = 1 - p(7) = 1 - 0.04 = 0.96$. Falso.

6.

Considera la seguente distribuzione di probabilità della variabile casuale X.

x	0	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	0.07	0.19	0.23	0.17	0.16	0.14	0.04

Qual è il valore atteso di X?

A) 0.46
B) 1.78
C) 2.74
D) 3.02

Soluzione. Abbiamo

$$E(X) = (0)(0.07)+(1)(0.19)+(2)(0.23)+(3)(0.17)+(4)(0.16)+(5)(0.14)+(6)(0.04) = 2.74.$$

7.

Se X e Y sono due variabili casuali con $\text{cov}(X, Y) = 0.25$, $\sigma_X^2 = 0.36$, e $\sigma_Y^2 = 0.49$, allora il il coefficiente di correlazione è A) 0.595 B) 0.354 C) 1.417 D) 1.190.

Soluzione. Abbiamo

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

quindi

$$\rho = \frac{0.25}{\sqrt{0.36 \cdot 0.49}} = 0.595.$$

Velo pietoso sui coefficienti di correlazione più grandi di 1!

8.

Quale dei seguenti è un esempio di variabile casuale discreta?

A) L'ammontantare di pioggia che cade in un intervallo temporale di 24 ore.
B) Il peso di un pacco all'ufficio postale.
C) La distanza che puoi percorrere con un pieno di benzina.
D) Il numero di vacche in una fattoria.

Soluzione.

A) È una misura (in mm)
B) È una misura (in kg)
C) È una misura (in km)
D) È un conteggio e dunque è una variabile discreta.

9.

Sia $X \sim N(17.1, \sigma = 3.2)$. Calcolare $P(15 < X < 20)$.

A) 0.5640
B) 0.5581
C) 0.2546
D) 0.1814

Soluzione. Si ha

$$P(15 < X < 20) = P(X < 20) - P(X < 15)$$

Standardizzando, si ha

$$P(X < 20) = P(Z < (20 - 17.1)/3.2) = P(Z < 0.91)$$

dove ho arrotondato a 2 cifre. Analogamente

$$P(X < 15) = P(Z < (15 - 17.1)/3.2) = P(Z < -0.66) = 1 - P(0.66)$$

Ora dalle tavole si trova che

$$P(Z < 0.91) = 0.8186, \quad P(Z < 0.66) = 0.7454$$

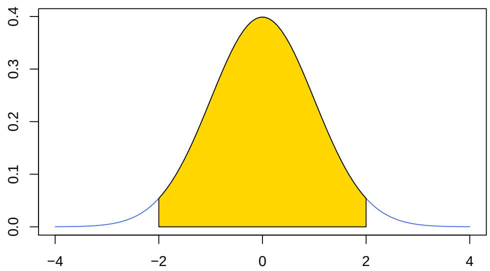
Quindi la probabilità è $0.8186 - (1 - 0.7454) = 0.5640$.

10.

Sia $Z \sim N(0,1)$ e sia c un possibile valore di Z. Trovare c tale che l'area totale tra $-c$ e $+c$ sia 0.9544.

A) 0.11
B) 2.50
C) 2.00
D) 0.06

Soluzione. Trova c tale che $P(-c < Z < c) = 0.9544$.



Nota che per rispettare la definizione bisogna che

$$P(Z > c) = (1 - 0.9544)/2 = 0.0228$$

Allora $P(Z < c) = 1 - P(Z > c) = 1 - 0.0228 = 0.9772$. Vai sulle tavole della normale e vedi che $c = 2$. Quindi la risposta è C).

11.

La probabilità che una persona prenda il raffreddore durante l'inverno è 0.4. Assumendo che 10 persone siano selezionate a caso, qual è la probabilità che esattamente 4 di loro prendano il raffreddore?

A) 0.502
B) 0.242
C) 0.751
D) 0.251

Soluzione. Chiamo p = probabilità che una persona prenda il raffreddore in inverno = 0.4. Se si selezionano "a caso" 10 persone (da una popolazione infinita) si stanno facendo 10 prove di Bernoulli indipendenti con probabilità di successo p. Il numero di persone X con il raffreddore si intende hanno distribuzione X $Binomiale(10, p = 0.4)$. Quindi

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} p^4 (1-p)^6 = 210(1-p)^6 p^4 = 0.251.$$

Risposta D.

12.

Se X e Y sono due variabili casuali con $E(X) = 5$, $E(Y) = 6$, $E(XY) = 21$, $\text{var}(X) = 9$ e $\text{var}(Y) = 10$, allora l'associazione lineare tra X e Y è:

A) debole e positiva.
B) debole e negativa.
C) forte e negativa.
D) forte e positiva.

Soluzione. L'associazione lineare si misura con il coefficiente di correlazione lineare.

$$\text{cor}(X, Y) = \text{cov}(X, Y)/\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}.$$

dove $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 21 - (5)(6) = -9$. Quindi

$$\text{cor}(X, Y) = -9/\sqrt{(9)(10)} \simeq -0.95.$$

L'associazione è negativa e forte. Risposta C).

13.

Ci siamo recentemente iscritto ad un golf club. Il numero di volte che si presume di giocare a golf in un mese è una variabile casuale con media 10 e deviazione standard 2.2. Si assume di pagare una quota sociale di 500 euro al mese e di pagare una quota addizionale di 50 euro per ogni partita di golf giocata. Qual è la deviazione standard della quota media mensile da pagare al Club?

A) 110

B) 324

C) 180

D) 220.

Soluzione. Il numero di volte che si gioca è aleatorio e lo chiamiamo X. Se in un mese pago 500 euro più 50 a partita al mese pago $500 + 50X$ euro. In media perciò pago

$$500 + 50E(X) = 500 + (50)(10) = 1000 \text{ euro}.$$

La varianza è

$$\text{var}(X) = \text{var}(500 + 50X) = 2500var(X) = 2500(2.2^2).$$

La deviazione standard è $\sigma(X) = (50)(2.2) = 110$ euro.

14.

Se X e Y sono due variabili casuali qualsiasi, quali delle seguenti ugualianze non è sempre vera?

A) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
B) $\text{var}(X+Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$
C) $\text{var}(4X+5Y) = 16\text{var}(X) + 25\text{var}(Y) + 40\text{cov}(X,Y)$
D) $E(4X+5Y) = 4E(X) + 5E(Y)$

Soluzione. Chiede quale è Falsa. A) Vera. B) Falsa: manca il termine $+2\text{cov}(X,Y)$. C) Vera. D) Vera.

Risposta B).

15.

Si assuma che il tempo di attesa per sedersi ad un ristorante sia approssimabile con una variabile casuale normale con media 15 minuti e scostamento quadratico medio di 4.75 minuti. Calcolare la probabilità di dover aspettare almeno 20 minuti prima di sedersi.

A) 0.1469
B) 0.3531
C) 0.6761
D) 0.1761.

Soluzione. Tempo $= X \sim N(15, \sigma = 4.75)$. La probabilità di dover aspettare almeno 20 minuti prima di sedersi è

$$P(X \geq 20) = P[Z > (20-15)/4.75] = P(Z > 1.05) = 1 - P(Z \leq 1.05) = 1 - 0.8531 = 0.1469.$$

16.

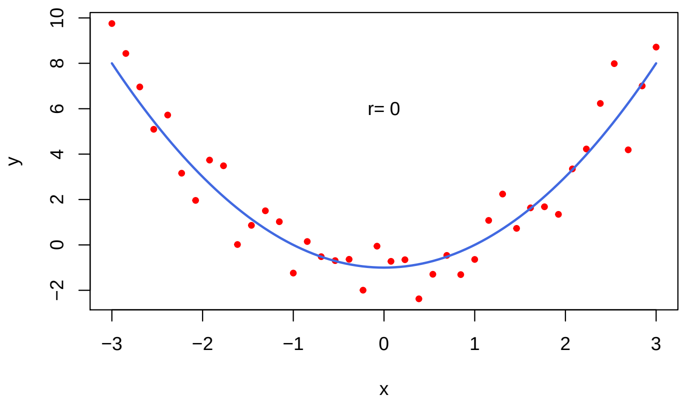
Data la variabile casuale $Y = a + bX$, segue che $\mu_Y = b\mu_X$. Vero o Falso?

Soluzione. Falso. $E(Y) = E(a+bX) = a + b\mu_X$.

17.

Se il coefficiente di correlazione lineare è nullo, allora non c'è nessun tipo di relazione tra le due variabili. Vero o Falso?

Soluzione. Falso. Ci può essere una relazione non lineare. Vedi Figura.



18.

Il lancio di una moneta rappresenta un esperimento di binomiale solo se la moneta è bilanciata, cioè se $p = 0.5$.

Soluzione. Falso ovviamente.

19.

Se X eY sono due variabili casuali con $\sigma_X^2 = 3.25$, $\sigma_Y^2 = 5.8$, e $\text{cov}(X, Y) = 14.703$, allora il coefficiente di correlazione lineare è $\rho = 0.78$.

Soluzione. Questo esercizio ha un problema. Infatti non esistono due variabili con quelle varianze e quella covarianza. Questo si vede subito perché il coefficiente di correlazione è

$$\rho = \frac{14.703}{\sqrt{3.25 \cdot 5.8}} = 3.39!!$$

Quindi la risposta è FALSO.

NOTA: il coefficiente di correlazione tornerebbe se fosse $\sigma_X = 3.25$, $\sigma_Y = 5.8$.

20.

Se X e Y sono due variabili casuali correlate, allora $E(X + Y) = E(X) + E(Y) + \text{cov}(X, Y)$. Vero o Falso?

Soluzione. Falso è $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

21.

Se Z è una variabile casuale normale standardizzata, un valore negativo di Z indica che la deviazione standard di Z è negativa. Vero o Falso?

Soluzione. Falso. La deviazione standard di Z è 1.

22.

La media e la mediana sono le stesse per una variabile casuale uniforme. Vero o Falso?

Soluzione. Vero: è una variabile simmetrica.

23.

La forma della distribuzione normale è determinata dalla deviazione standard σ. Una diminuzione di σ riduce l'altezza della curva e appiattisce la curva lungo l'asse delle ascisse. Un incremento di σ aumenta l'altezza della curva e riduce l'appiattimento della curva. Vero o Falso?

Soluzione. Falso: è esattamente l'opposto.

24.

Se due variabili casuali X e Y sono indipendenti, allora

$$P(y \mid x) = P(x), \text{ e } P(x \mid y) = P(y) \text{ per ogni } x, y.$$

Vero o Falso?

Soluzione. Falso: la definizione è

$$P(y \mid x) = P(y), \text{ e } P(x \mid y) = P(x) \text{ per ogni } x, y.$$

25.

Se X è una variabile casuale binomiale con $n = 5$ e $p = 0.2$, allora il valore atteso è 1. Vero o Falso?

Soluzione. Vero: $E(X) = np = (5)(0.2) = 1$.

Esercizi dai compiti a casa (HW)

HW 5.9

Dato un campione casuale di dimensione $n = 4900$ da una popolazione Bernoulliana con $p = 0.5$ sia X il numero di successi

(a) la $P(X > 2480)$
(b) la $P(X < 2390)$
(c) la $P(2445 < X < 2520)$
(d) Il numero di successi che ha probabiità 0.1 di NON essere superato.

(e) Il numero di successi che ha probabilità 0.09 di ESSERE superato.

Soluzione.

Si usa l'approsimazione normale $X \approx N(\mu = np, \sigma^2 = npq) = N(\mu = 2450, \sigma = 35)$. Quindi

(a) $P(X > 2480) = P(Z > (2480 - 2450)/35) = P(Z > 0.86) = 1 - P(Z \leq 0.86) = 1 - 0.8051 = 0.1949$

(b) $P(X < 2390) = P(Z < (2390 - 2450)/35) = P(Z < -1.71) = 1 - P(Z < 1.71) = 1 - 0.9564 = 0.0436$

(c) $P(2445 < X < 2520) = P((2445-2450)/35 < Z < (2520-2450)/35) = P(-0.14 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -0.14) = 0.9772 - (1 - P(Z < 0.14)) = 0.9772 - (1 - 0.5557) = 0.5329$

(d) Trova k tale $P(X < k) = 0.1$ ossia $P(Z < (k - 2450)/35) = 0.1$. Si cerca sulla Tavola 2, ultima riga il quantile che lascia A DESTRA 0.1 e poi gli si cambia segno. Fare il grafico! Si trova sulla Tavola 2, ultima riga si vede che $z_{0.1} = 1.282$. Quindi $(k - 2450)/35 = -1.282$ e quindi

$$k = 2450 - 1.282 \cdot 35 = 2405.13.$$

(e) Trova k tale che $P(X > k) = 0.09$ ossia $P(X \leq k) = 0.91$. Standardizzo e ottengo

$$P(Z \leq (k - 2450)/35)) = 0.91$$

Il quantile 0.91 stra tra 1.34 e 1.35 quindi interpolando è 1.355. Allora

$$(k - 2450)/35) = 1.355, \text{ cioè } k = 2450 + 1.355 \cdot 35 = 2497.43.$$