Capitolo 4

PROBABILITÀ

Cosa si impara

- Idea di esperimento aleatorio
- Idea di evento
- Come si definisce una probabilità
- Idea di probabilità condizionata
- Determinare se gli eventi sono indipendenti
- Come si aggiornano le probabilità

Esperimenti aleatori

Esperimento aleatorio

Un **esperimento aleatorio** è un esperimento in cui si conoscono i possibili risultati ma l'esito è incerto.

Esempio estrazione da un urna con 6 biglietti:

$$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}$$

L'insieme dei possibili risultati si dice **spazio campionario**

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

I singoli risultati si chiamano **eventi elementari**

Esperimento aleatorio

Un **esperimento aleatorio** è un esperimento in cui si conoscono i possibili risultati ma l'esito è incerto.

Esempio lancio di una moneta: equivale a estrarre dall'urna

$\boxed{\text{T}}$ $\boxed{\text{C}}$

Lo **spazio campionario** In questo caso è

$$S = \{T, C\}$$

Esperimento aleatorio

Un **esperimento aleatorio** è un esperimento in cui si conoscono i possibili risultati ma l'esito è incerto.

Esempio estrazione del Lotto

Lo **spazio campionario** In questo caso è

$$S = \{1, 2, \ldots, 90\}$$

Esperimento di Bernoulli

È un esperimento che può avere solo due risultati

Esempi

Il prossimo pezzo prodotto sarà difettoso?

Domani pioverà?

Questa azienda farà default quest'anno?

Lo **spazio campionario** In questo caso è $S = \{\text{Sì}, \text{No}\}$

Esperimento aleatorio

Talvolta lo **spazio campionario è infinito**

Quante saranno le richieste
di risarcimento danni?

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Quanto durerà questo condizionatore?

$$S = (0, \infty)$$

Quale sarà la temperatura domani?

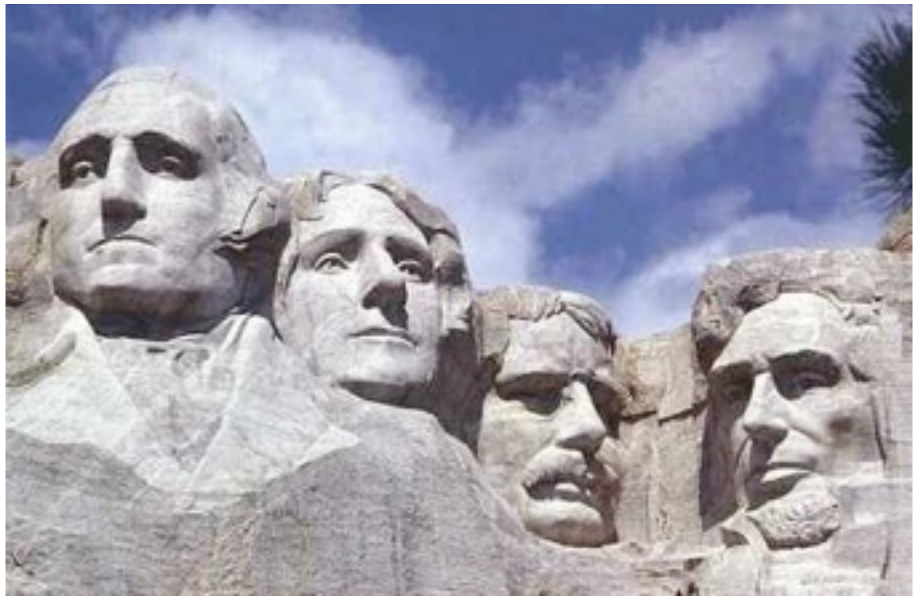
$$S = (-\infty, \infty)$$

Esperimento ripetibile

Alcuni esperimenti sono **ripetibili** esattamente
Lancio di una moneta, estrazioni del Lotto

o almeno ripetibili in linea di principio
Durata di un condizionatore, sesso di un nascituro

Alcuni sono esperimenti singolari, cioè **non ripetibili**
Chi vincerà questo campionato?
Chi sarà il prossimo presidente?



Eventi

Eventi

*Un **evento** è un sottoinsieme di eventi elementari.*
*Si **verifica** se uno degli elementi elementari si verifica*

- Lancio di un dado: A = esce un numero pari
- B = esce un numero maggiore di 3
- C = esce un numero negativo
- D = esce un numero minore di 2

$$A = \{2, 4, 6\}$$
$$B = \{4, 5, 6\}$$
$$C = \emptyset$$

<u>Evento impossibile!</u>

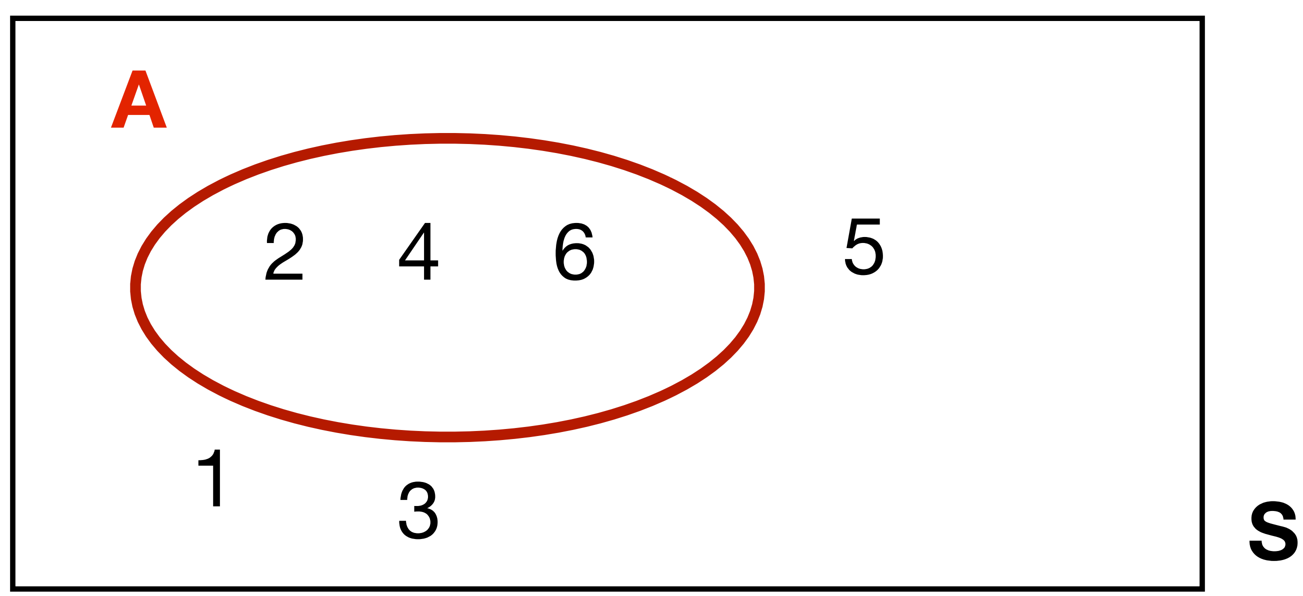
$$D = \{1\}$$

Eventi = insiemi

Venn

Si rappresenta con un diagramma di Venn

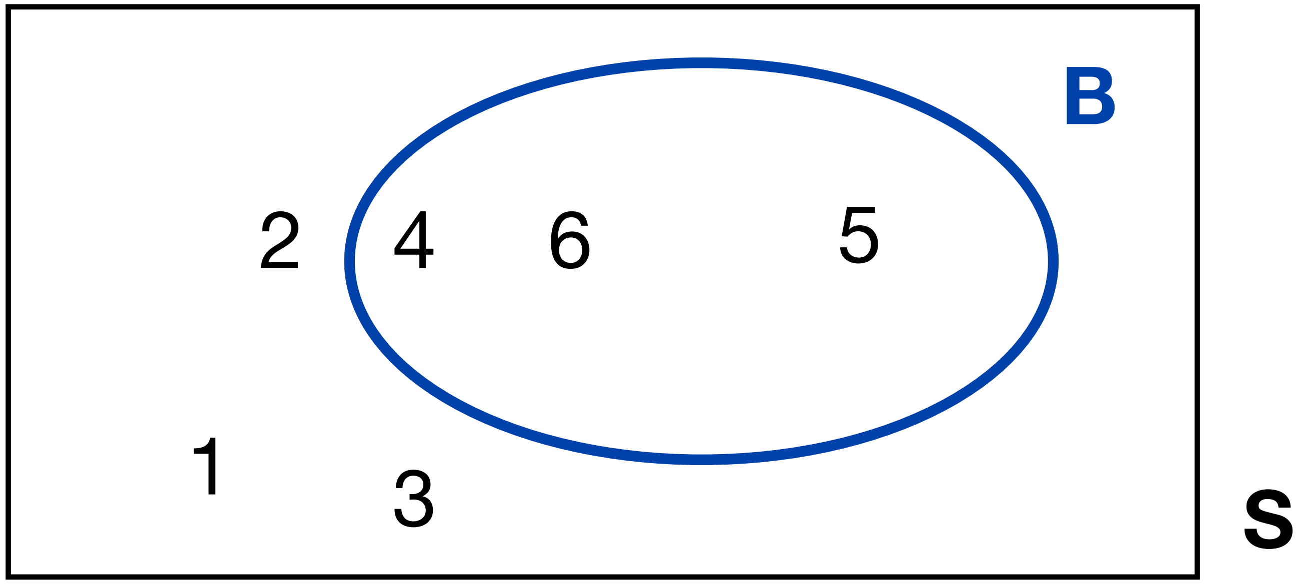
- Lancio di un dado: **A** = esce un numero pari
- **B** = esce un numero maggiore di 3
- **C** = esce un numero negativo
- **D** = esce un numero minore di 2



Eventi = insiemi

Si rappresenta con un diagramma di Venn

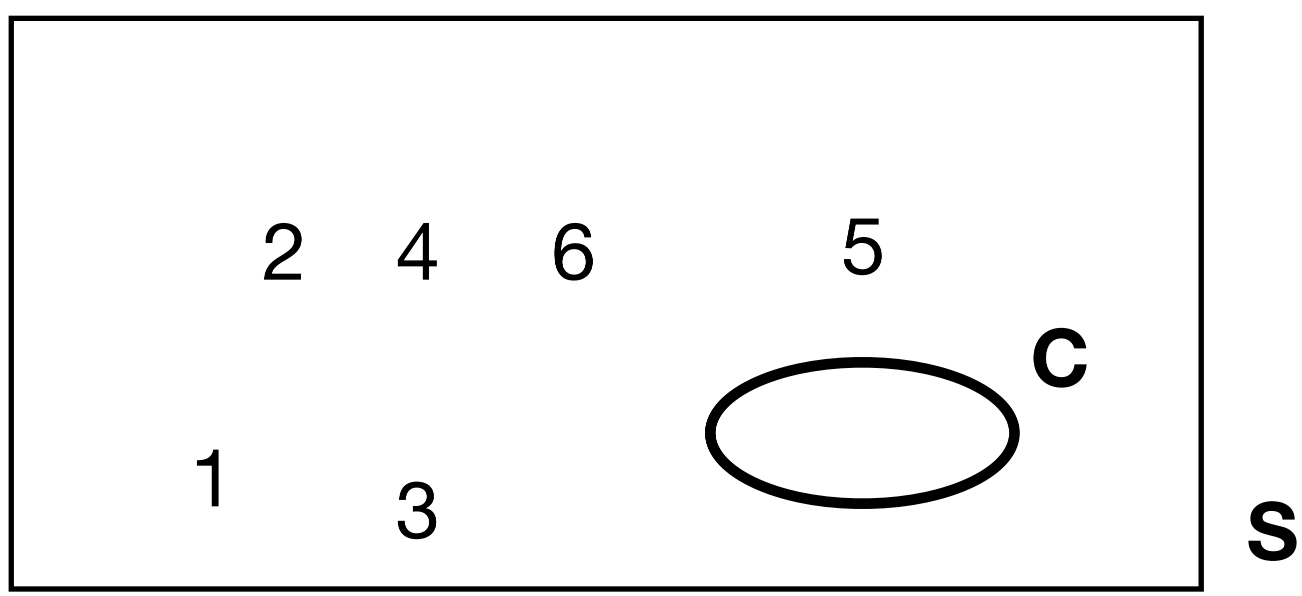
- Lancio di un dado: **A** = esce un numero pari
- **B** = esce un numero maggiore di 3
- **C** = esce un numero negativo
- **D** = esce un numero minore di 2



Eventi = insiemi

Si rappresenta con un diagramma di Venn

- Lancio di un dado: **A** = esce un numero pari
- **B** = esce un numero maggiore di 3
- **C** = esce un numero negativo
- **D** = esce un numero minore di 2

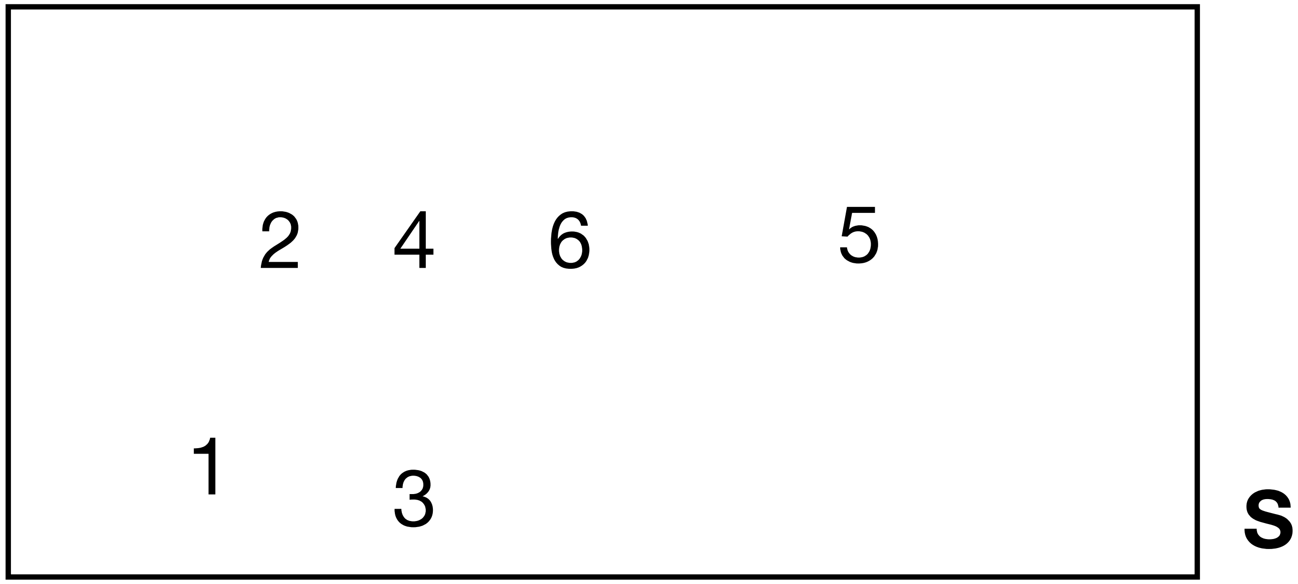


Un insieme senza elementi

Eventi = insiemi

Si rappresenta con un diagramma di Venn

- Lancio di un dado:
  Lo spazio campionario S = {1,2,3,4,5,6}
  è un evento che si verifica sempre
  per questo si chiama **evento certo**

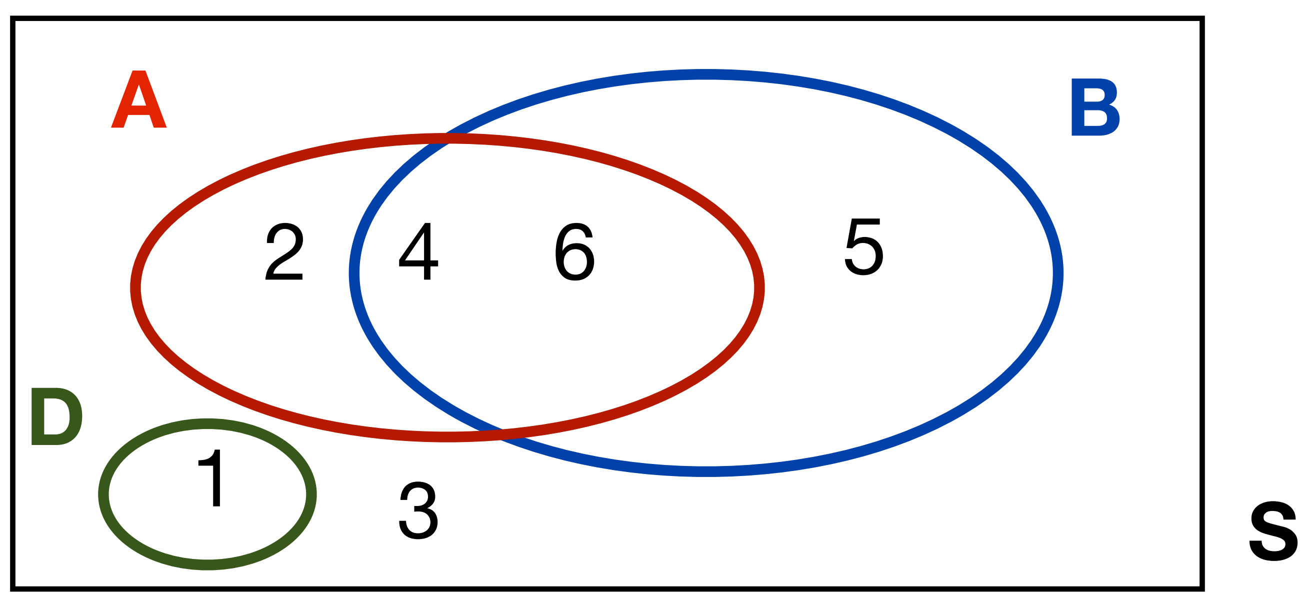


Evento certo

Eventi = insiemi

Si rappresenta con un diagramma di Venn

- Lancio di un dado: **A** = esce un numero pari
- **B** = esce un numero maggiore di 3
- **C** = esce un numero negativo
- **D** = esce un numero minore di 2



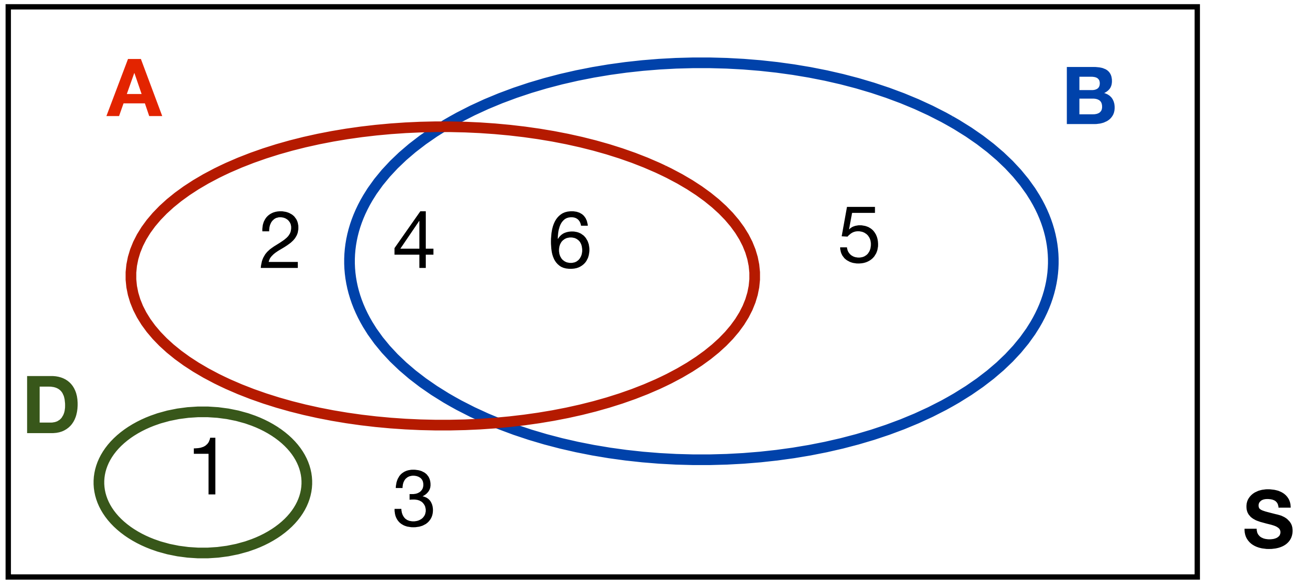
Calcolo con gli eventi

Due eventi possono essere **compatibili** o **incompatibili**

Compatibili se si possono verificare contemporaneamente

Incompatibili se l'uno esclude l'altro

A e B sono compatibili;   A e D sono incompatibili



Calcolo con gli eventi

Il libro li chiama **mutuamente esclusivi**

Si dicono anche **disgiunti**

Se uno si verifica l'altro non si può verificare

Esempio

Se estraggo a caso uno studente di EC e considero

A = è femmina

B = fuma

Sono mutuamente esclusivi?

Calcolo con gli eventi

Il libro li chiama **mutuamente esclusivi**

Si dicono anche **disgiunti**

Se uno si verifica l'altro non si può verificare

Esempio

Se estraggo a caso uno studente di EC e considero

A = risiede in provincia di FI

B = risiede in provincia di PT

Sono mutuamente esclusivi?

Calcolo con gli eventi

Due eventi si combinano con le operazioni insiemistiche

Intersezione di eventi $A \cap B$

Si verifica se si verificano tutti e due

Non si verifica se almeno uno non si verifica

A = fuma

B = risiede a PT

$A \cap B$ = è un fumatore che risiede a PT

se A e B sono incompatibili l'intersezione è vuota

Calcolo con gli eventi

Due eventi si combinano con le operazioni insiemistiche

Unione di eventi $A \cup B$

Si verifica se se ne verifica almeno uno

Non si verifica se non si verificano entrambi

A = risiede a FI

B = risiede a PT

$A \cup B$ = risiede a FI o a PT

Calcolo con gli eventi

Se l'unione di A e B è uguale allo spazio intero S

A e B si dicono **necessari** perchè per forza

uno dei due si deve verificare

Il libro li chiama **collettivamente esaustivi**

Lancio di un dado:

A = esce un numero maggiore di 2

A = {3,4,5,6}

B = esce un numero minore di 5

B = {1,2,3,4}

Calcolo con gli eventi

Se l'unione di A e B è uguale allo spazio intero S

A e B si dicono **necessari** perchè per forza

uno dei due si deve verificare

Il libro li chiama **collettivamente esaustivi**

terminologia
del LIBRO!

A = risiede in provincia di FI

B = risiede in provincia di PT

non sono necessari perchè uno potrebbe

risiedere in un'altra provincia

Evento complementare

L'evento **complementare** di A è l'evento che si verifica se A **non** si verifica

A = risiede in provincia di FI

$\overline{A}$ = non risiede in provincia di FI

Un evento e il suo complementare sono per forza incompatibili e necessari

Probabilità

Misura dell'incertezza di un evento

La probabilità è un modo per misurare l'incertezza di un evento

Approccio classico

Se gli eventi elementari sono **equiprobabili** è il rapporto tra
il numero di **casi favorevoli** e il numero di **casi possibili**

Esempio: lancio di una moneta
Casi possibili = {T, C}

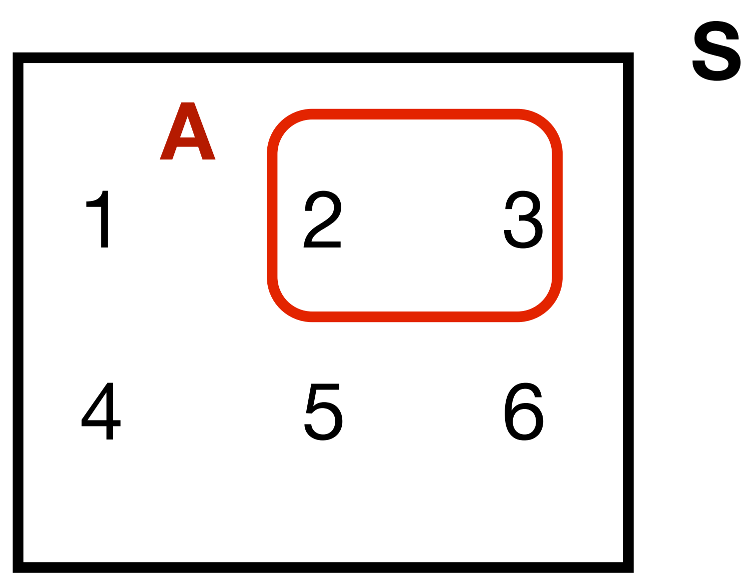
Lancio di un dado
Casi possibili = {1,2,3,4,5,6}

Nei giochi di sorte: probabilità classica

Se tutti gli eventi sono **equiprobabili** per simmetria
si assegna a ciascuno una probabilità uguale a 1/N

Esempi: Dado, roulette, moneta, lotterie, urne

A = esce un numero minore di 4 e maggiore di 1



P(**A**) = 2/6

$$P(A) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}$$

$$\frac{\#\ \text{eventi che compongono } A}{\#\ \text{eventi che compongono } S}$$

Estrazioni da urne

Urna

$\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{4}$

Estrazioni di un biglietto
Ogni biglietto ha la stessa probabilità di essere estratto

La probabilità di un evento è uguale al numero di eventi elementari che lo compongono divisa per il totale di eventi elementari

$$P(\text{Esce il } 3) = \frac{2}{8}$$

Misura dell’incertezza di un evento

La probabilità è un modo per misurare l’incertezza di un evento

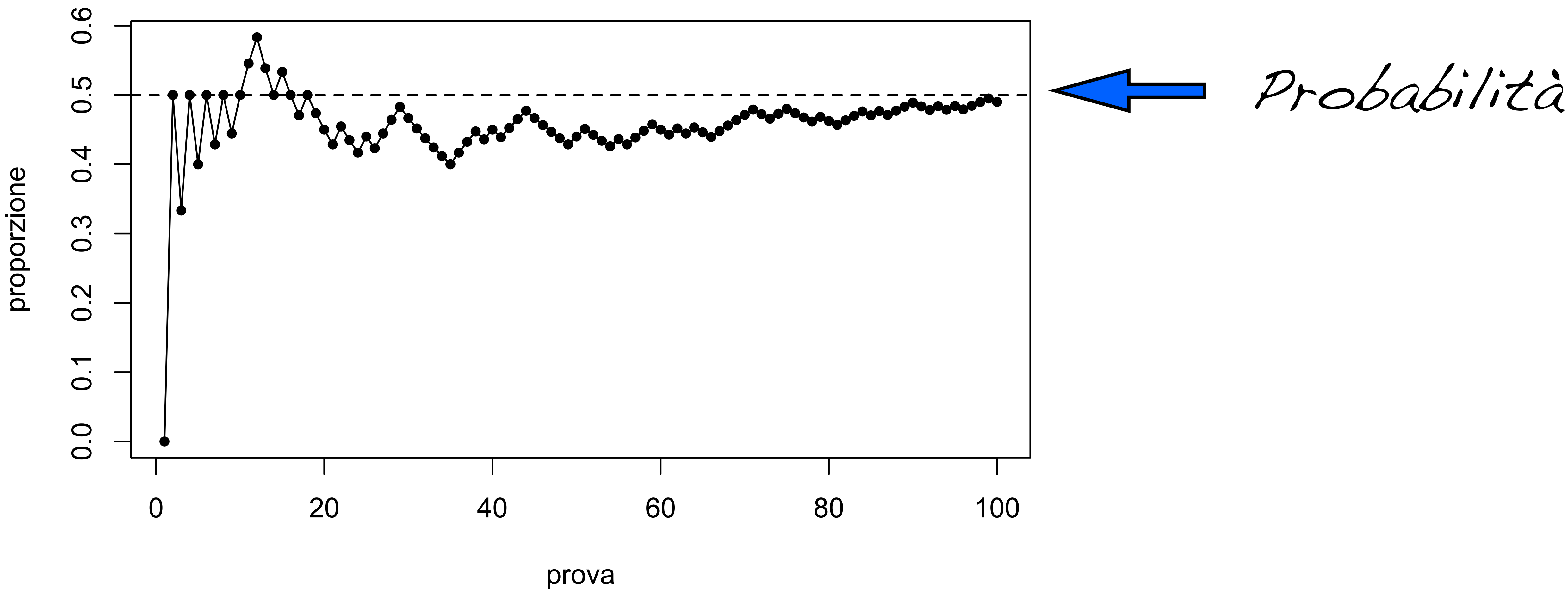
Approccio frequentista

Negli **esperimenti ripetibili** è la **proporzione** di volte
che l’evento si verifica in un **gran numero** di ripetizioni delle prove

CTCTCTCTCTTTCCTCCTCCCTCCTCTTTCCCC
CCTTTCTCTTTCCCCCTTCCCTCTTTCCTCTCC
TTTTTCCTTCCCTCCTTTCTCTTTCCTCTCTTTC

Esempio lancio di una moneta

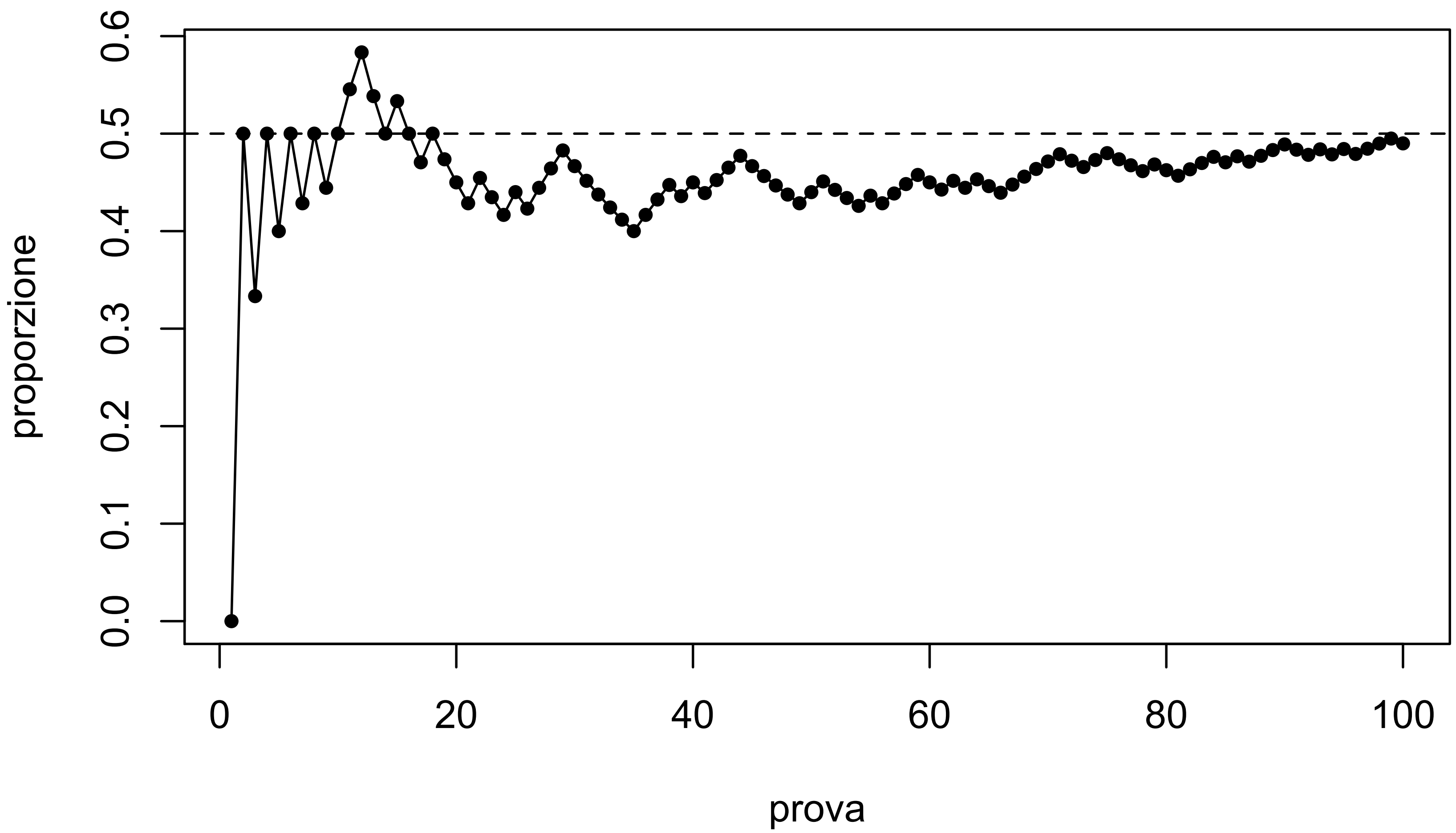
Misura dell’incertezza di un evento



CTCTCTCTCTTTCCTCCTCCCTCCTCTTTCCCC
CCTTTCTCTTTCCCCCTTCCCTCTTTCCTCTCC
TTTTTCCTTCCCTCCTTTCTCTTTCCTCTCTTTC

Esempio lancio di una moneta: proporzione di teste

Misura dell’incertezza di un evento

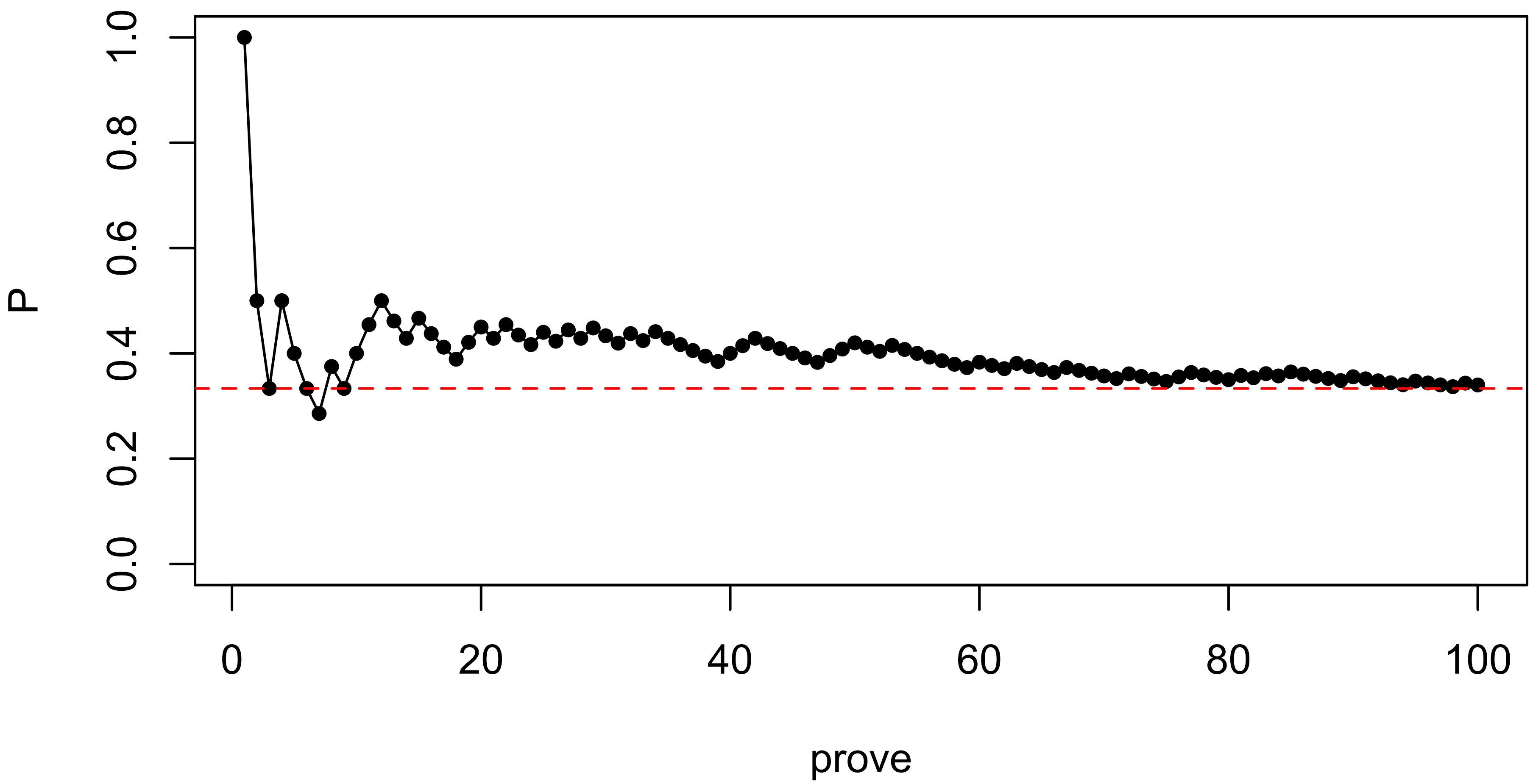


Probabilità
1/2
coincide
con la
probilità
classica

CTCTCTCTCTTTCCTCCTCCCTCCTCTTTCCCC
CCTTTCTCTTTCCCCCTTCCCTCTTTCCTCTCC
TTTTTCCTTCCCTCCTTTCTCTTTCCTCTCTTTC

Esempio lancio di una moneta: proporzione di teste

Quando gli eventi non sono equiprobabili



NON coincide con la probabilità classica

1001000101110010001101001
0101001010000011100000111
0010000000100100010000100
1100010101000001000010001

1 = punta all'ingiù

Probabilità

La probabilità di un evento è una **funzione** che associa all'evento un numero tra tra 0 e 1 (inclusi)

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Evento CERTO $P(S) = 1$

Evento IMPOSSIBILE $P(\emptyset) = 0$

NOTA! ci sono anche altri eventi che possono avere probabilità 0 o 1

Probabilità

La probabilità di un evento è una **funzione** che associa all'evento un numero tra tra 0 e 1 (inclusi)

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

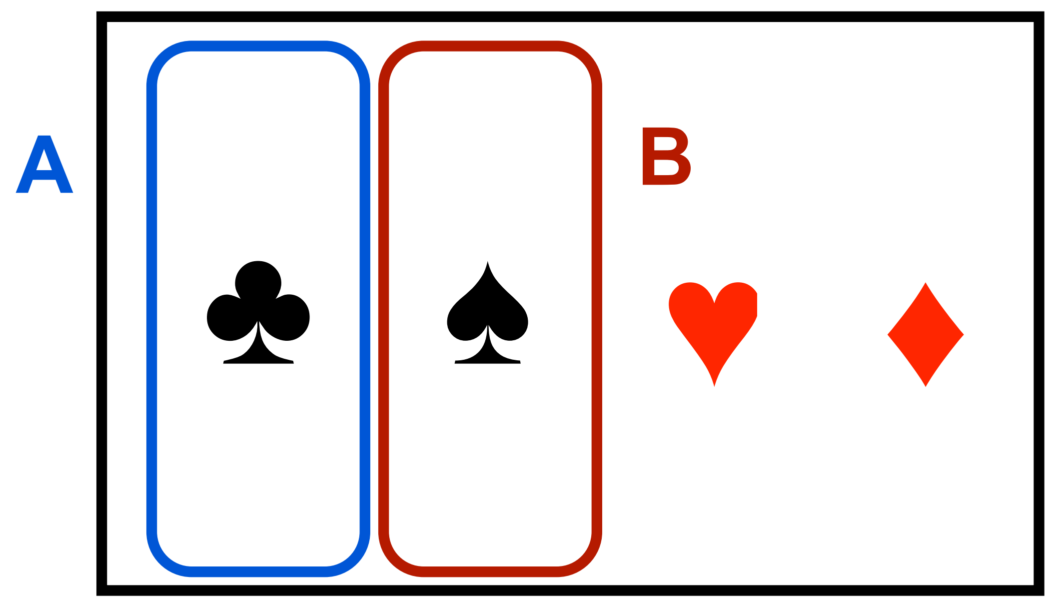
Se A, B sono **incompatibili**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Probabilità

Considera un mazzo di 52 carte, con i quattro semi: ♥ ♣ ♦ ♠

A = la carta è di fiori **B** = la carta è di picche



sono incompatibili

$$P(A) = 13/52 \quad P(B) = 13/52$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 13/52 + 13/52 = 1/2$$

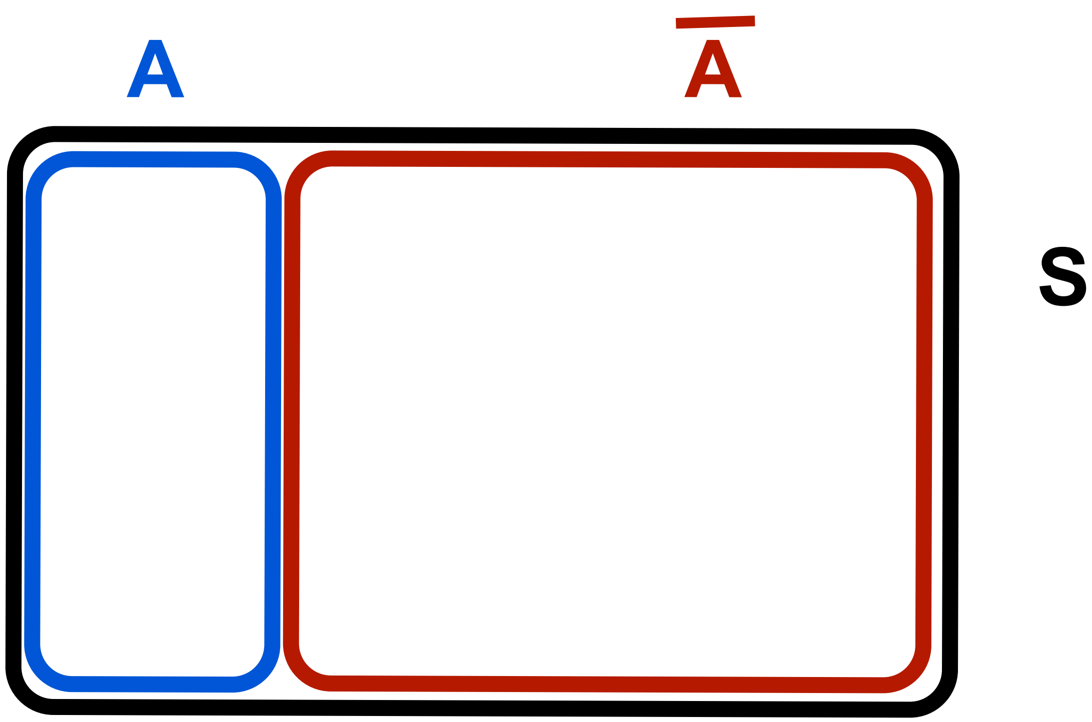
Probabilità dell'evento complementare

La probabilità che ti venga concesso un mutuo è 0.4: P(A) = 0.4

La probabilità che **non** ti venga concesso

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.4 = 0.6$

A e il complementare sono **necessari e incompatibili**



$$P(A \cup \bar{A}) = P(S) = 1$$

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Regola generale della somma

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Mazzo di 52 carte, con i quattro semi: ♥ ♣ ♦ ♠

A = asso **B** = la carta è rossa. P(asso oppure carta rossa) = ?

Tipo/colore	Rossa	Nera	Totale
Asso	2	2	4
Non asso	24	24	48
Totale	26	26	52

$$P(\text{asso}) + P(\text{rossa}) - P(\text{asso} \cap \text{rossa}) =$$

$$\frac{4}{52} + \frac{26}{52} - \frac{2}{52} = \frac{28}{52}$$

Regola generale della somma

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Una catena di fast food sa che dei clienti
il 75% usano la mostarda **A**
l'80% usano il ketchup **B**
il 65% usano entrambi **A** e **B**

Qual è la probabilità che i clienti usino almeno uno dei due?

$$P(A \cup B) = 0.75 + 0.8 - 0.65 = 0.90$$

Contare i casi favorevoli e i casi possibili

- Probabilità classica: casi favorevoli su casi possibili
- Talvolta è difficile contare i casi perché sono molti e non è pratico elencarli tutti, uno ad uno
- Soluzione: usare il **calcolo combinatorio**

Introduzione al calcolo combinatorio

L’esempio classico

- C’è un’urna con 90 palline numerate (Lotto)
- Esperimento: una estrazione **senza ripetizione** di 5 numeri
- L’evento elementare è un **sottoinsieme** di {1, 2, ..., 90} di 5 numeri
- Quanti sono gli eventi elementari possibili?

L’esempio classico

- C’è un’urna con 90 palline numerate (Lotto)
- Esperimento: una estrazione **senza ripetizione** di 5 numeri
- L’evento elementare è un **sottoinsieme** di {1, 2, ..., 90} di 5 numeri
- Quanti sono gli eventi elementari possibili?

$$C_{90,5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 43949268$$

Numero di sottoinsiemi

Combinazioni di N oggetti di classe n

È la stessa cosa!

Numero di sottoinsiemi di dimensione n
da un insieme di dimensione N

$$C_{N,n} = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}$$

a volte si indica con $\binom{N}{n}$

Esempio: numero di sottoinsiemi di dimensione 2 da {1,2,3}
{1,2} {1,3} {2,3}

$$C_{3,2} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1)(1)} = 3$$

Triangolo di Tartaglia (o di Pascal)

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

eccetera

Ogni numero interno è la somma dei due soprastanti

Triangolo di Tartaglia (o di Pascal)

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

Ogni numero interno è la somma dei due soprastanti

Triangolo di Tartaglia (o di Pascal)

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Ogni numero è un un numero di combinazioni

$$C_{7,3} = 35$$

Coefficienti Binomiali

Si chiamano anche **coefficienti binomiali**

perché sono coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^N$

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Estrazioni del lotto

Tutti i $C_{90,5} = 43949268$
eventi elementari
sono **equiprobabili**

Casi
POSSIBILI

Consideriamo ora l'evento: T = esce {47, 77, 90}

Un TERNO!

Quanti sono i **casi favorevoli**?

Estrazioni del lotto

Siccome i tre numeri {47, 77, 90} sono fissi, si possono solo estrarre gli altri 90-3 = 87 nelle rimanenti due posizioni

$$C_{87,2} = \frac{87 \cdot 86}{2} = 3741$$

Casi FAVOREVOLI

Questi sono tutti i possibili insiemi di 2 elementi estratti da 87

Quindi:
probabilità di **terno** secco = $\dfrac{C_{87,2}}{C_{90,5}} = \dfrac{3741}{43949268} = \dfrac{1}{11748}$

Probabilità condizionata

Probabilità condizionata

Ogni probabilità è subordinata all'informazione corrente

Esempio 1
A = il cliente restituisce il mutuo
P(A) = ?

B = il cliente ha un lavoro a tempo determinato
P(A dato B) = $P(A|B)$ = ?

Probabilità che l'individuo restituisca il mutuo
sapendo che ha un lavoro a tempo determinato

Probabilità condizionata

Ogni probabilità è subordinata all'informazione corrente

Esempio 2
A = un individuo ha l'AIDS
P(A) = ?

B = l'individuo è negativo al test dell'AIDS

P(A | B) = probabilità che un individuo abbia l'AIDS sapendo che risulta negativo al test dell'AIDS

P(B | A) = probabilità che un individuo risuti negativo al test dell'AIDS sapendo che ha l'AIDS

Probabilità condizionata

Urna:

$\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{4}$ $\boxed{4}$

Probabilità che esca un numero $< 3 = 3/8$

Probabilità condizionata

Supponiamo di sapere che è uscito un numero pari

Urna:

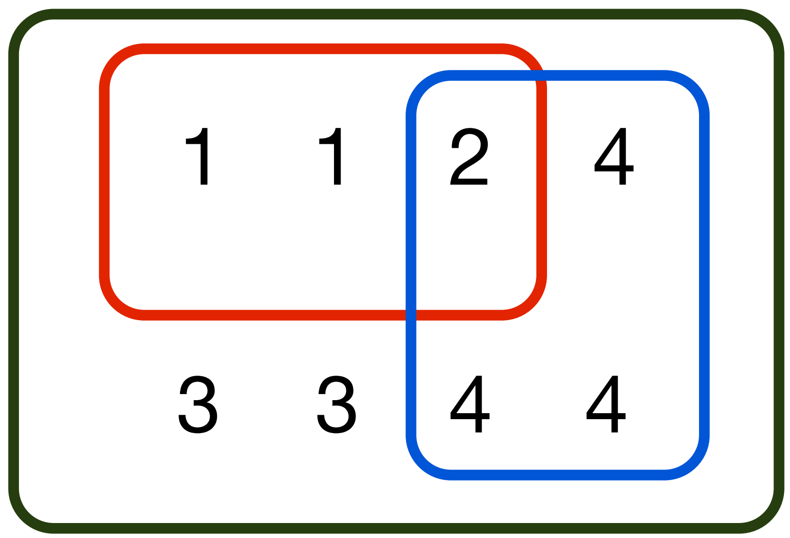
~~1~~ ~~1~~ 2 ~~3~~ ~~3~~ 4 4 4

Probabilità che esca un numero < 3 = 3/8

Probabilità che esca un numero < 3
sapendo è uscito un numero pari è 1/4

Spazio campionario ridotto

A = esce un numero < 3

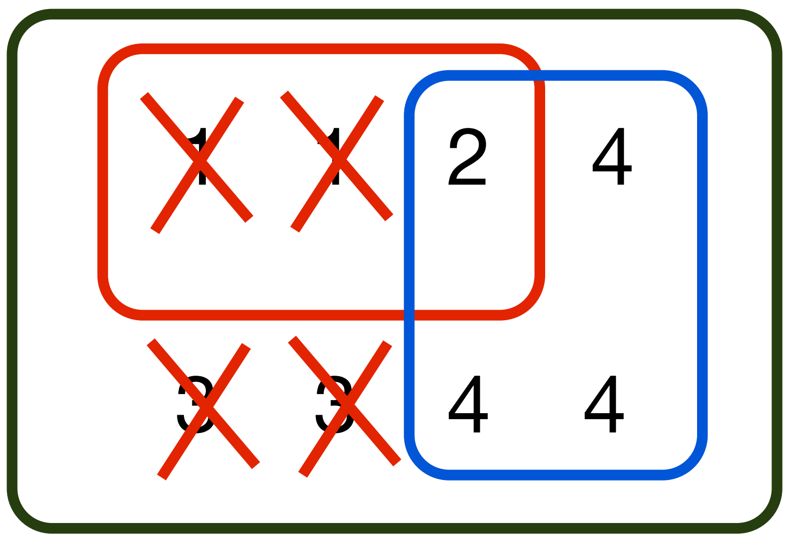


B = esce un numero pari

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/8}{4/8} = \frac{1}{4}$$

Spazio campionario ridotto

A = esce un numero < 3



B = esce un numero pari

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad = \frac{1/8}{4/8} = \frac{1}{4}$$

Per calcolare la probabilità condizionata

Una catena di fast food sa che dei clienti
il 75% usano la mostarda **A**
l’80% usano il ketchup **B**
il 65% usano entrambi **A** e **B**

- Qual è la probabilità che un cliente usi il ketchup?
- Qual è la probabilità che usi il ketchup **sapendo** che usa la
- mostarda?

$$P(B) = 0.8$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.65}{0.75} = 0.8667$$

Probabilità condizionata

In generale la probabilità di un evento A sapendo che si è verificato un evento condizionante B è

P(intersezione dei due eventi)/P(evento condizionante)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

evento condizionante

Regola del prodotto

Quindi la probabilità che si verifichino contemporaneamente due eventi A e B è

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

cioè la probabilità che si verifichi il primo per la probabilità che si verifichi il secondo dato il primo

Regola del prodotto

Poichè l'intersezione di A e B è uguale all'intersezione di B e A

Quindi la probabilità che si verifichino contemporaneamente due eventi A e B è

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

cioè la probabilità che si verifichi uno dei due per la probabilità che si verifichi l'altro dato il primo

Esempi con una tabella doppia

Trovare lavoro e tipo di laurea (probabilità in %)

	lavora	non lavora	Totale
Economia	30	10	40
Lettere	30	30	60
Totale	60	40	**100**

P(Economia) = 0.4 P(lavora) = 0.6

P(Economia e lavora) = 0.3 P(lavora | Economia) = 0.3/0.4 = 0.75

Esempi con una tabella doppia

Trovare lavoro dato il tipo di laurea (probabilità in %)

	lavora	non lavora	Totale
Economia	75	25	**100**
Lettere	50	50	**100**
Totale	60	40	**100**

P(lavora|Economia) = 0.75

P(lavora|Lettere) = 0.50

il lavoro dipende dal tipo di laurea!

Esempi con una tabella doppia

Abbandono e sesso (probabilità in %)

	abbandona	continua	Totale
maschio	4	36	40
femmina	6	54	60
Totale	10	90	**100**

P(maschio) = 0.40 P(abbandono) = 0.10

P(maschio e abbandona) = 0.04
P(abbandona | maschio) = 0.04/0.40 = 0.10

Esempi con una tabella doppia

Trovare lavoro dato il sesso (probabilità in %)

	abbandona	continua	Totale
maschio	10	90	**100**
femmina	10	90	**100**
Totale	10	90	**100**

P(abbandona|maschio) = 0.1

P(abbandona|femmina) = 0.1

P(abbandona) = 0.1

L'abbandono e il sesso sono INDIPENDENTI

Indipendenza

Due eventi A e B sono **indipendenti** se P(A|B) = P(A)

Se sono **indipendenti** la regola del prodotto diventa

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B)$$

cioè la probabilità che si verifichino entrambi è
*il **prodotto** delle due probabilità*

Indipendenza

	abbandona	continua	Totale
maschio	4	36	40
femmina	6	**54**	**60**
Totale	10	**90**	**100**

*cioè la probabilità che si verifichino entrambi è il **prodotto** delle due probabilità*

P(femmina e continua) = 0.54 = 0.9 x 0.6

Attenzione

Se A e B sono **indipendenti**

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Se A e B sono **incompatibili**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Alberi e regola del prodotto

Esiste un modo per visualizzare la **regola del prodotto**

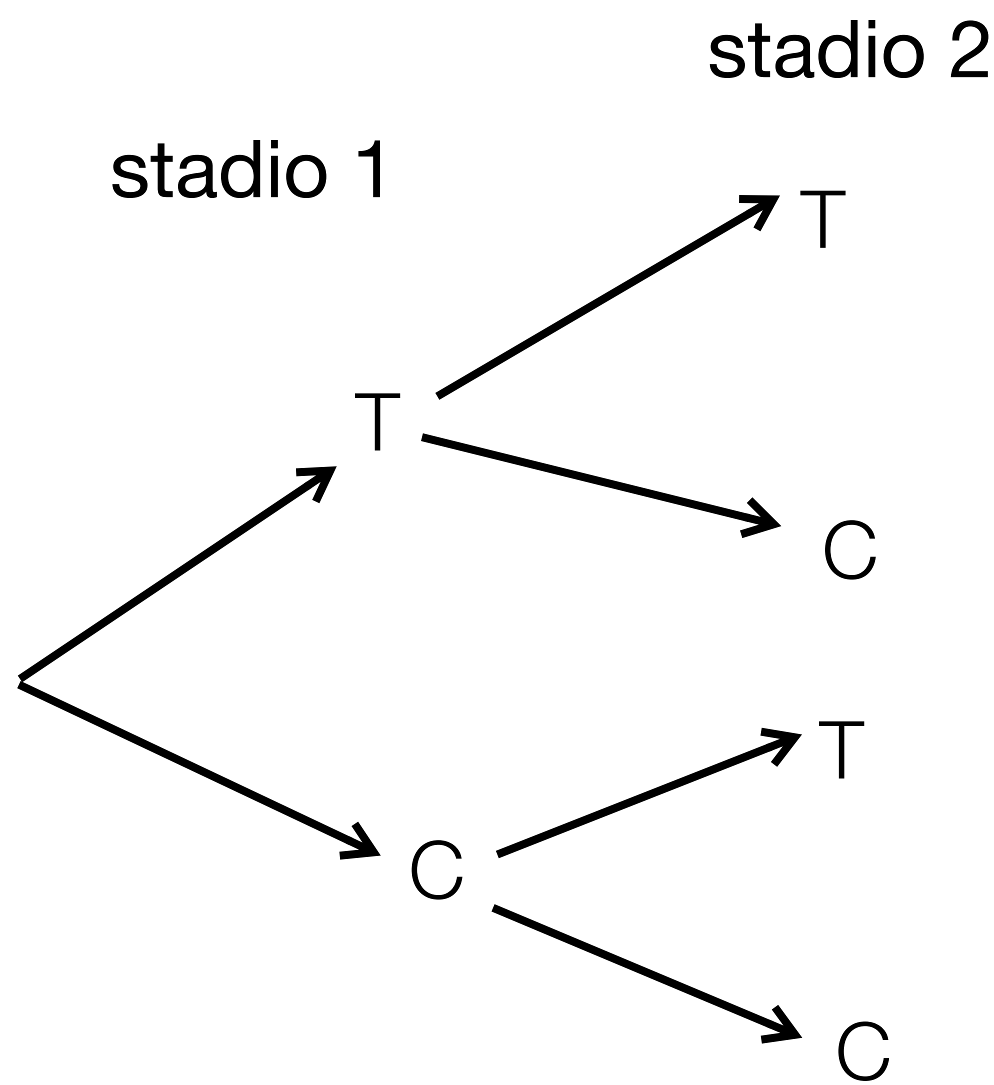
$P(A \text{ e } B) = P(A)\, P(B|A)$

usando una rappresentazione con

un **albero di probabilità**

Alberi di probabilità

Esempio: **due** lanci di una moneta



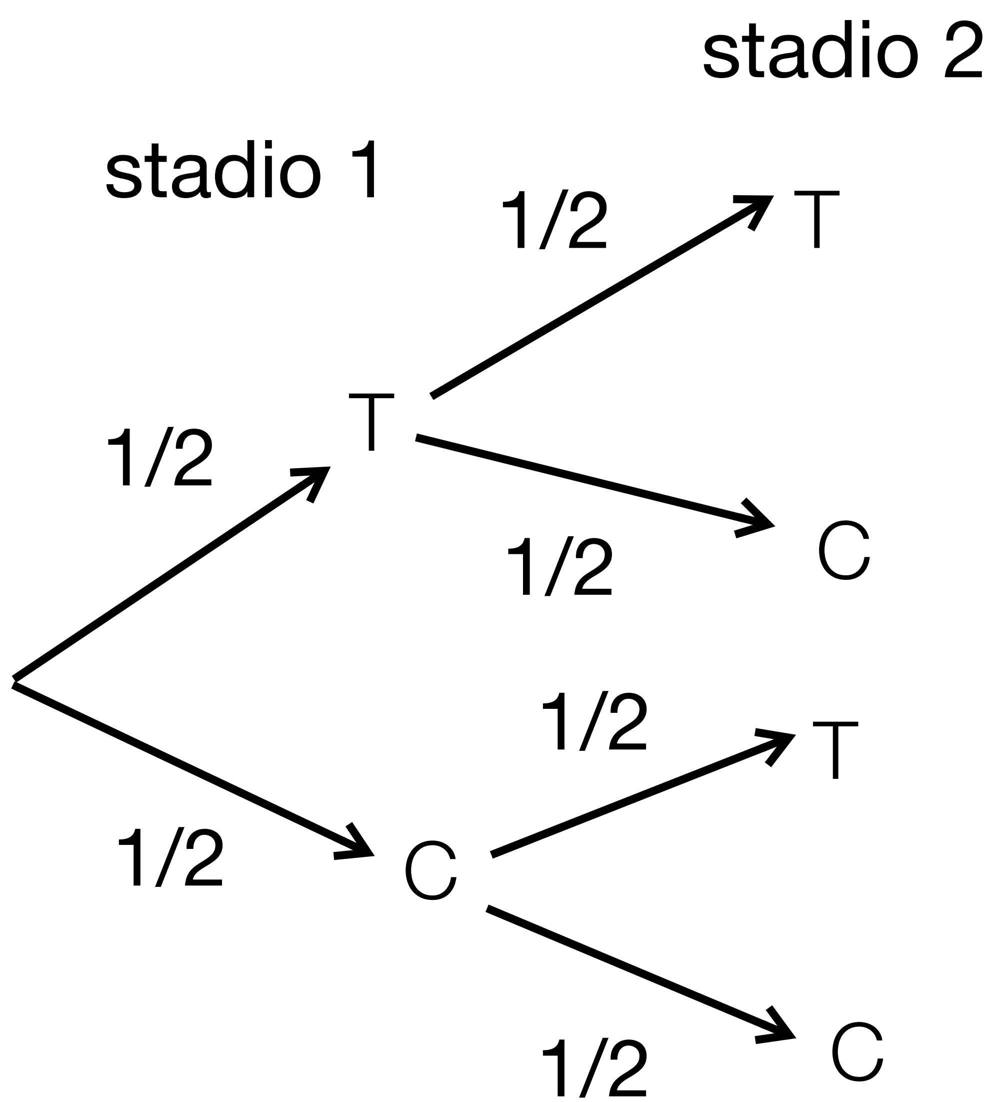
Risultati ordinati

T	T
T	C
C	T
C	C

$4 = 2^2$ possibili coppie

Alberi di probabilità (moneta equa)

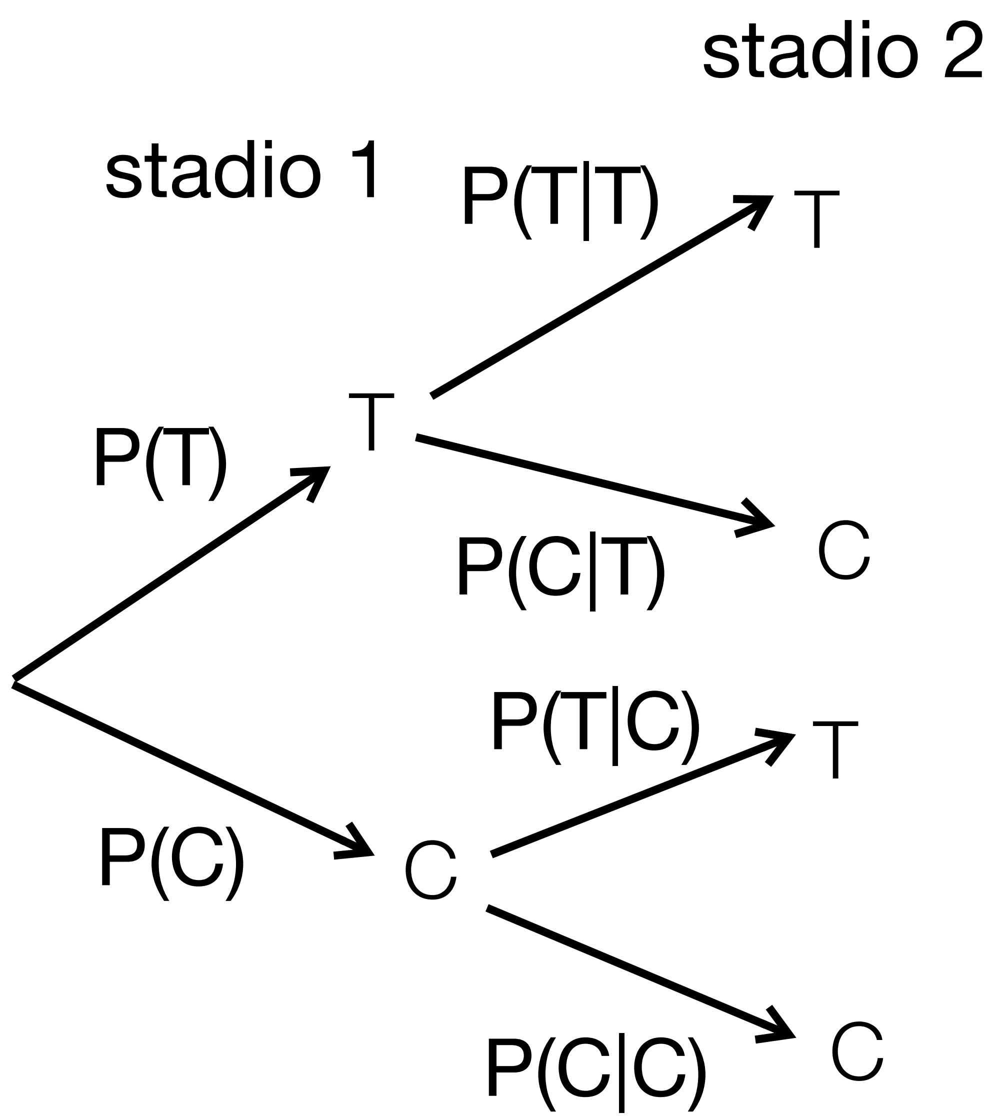
Il secondo lancio **è indipendente** dal primo



Risultati		Probabilità
T	T	1/4
T	C	1/4
C	T	1/4
C	C	1/4

$4 = 2^2$ possibili coppie

Alberi di probabilità

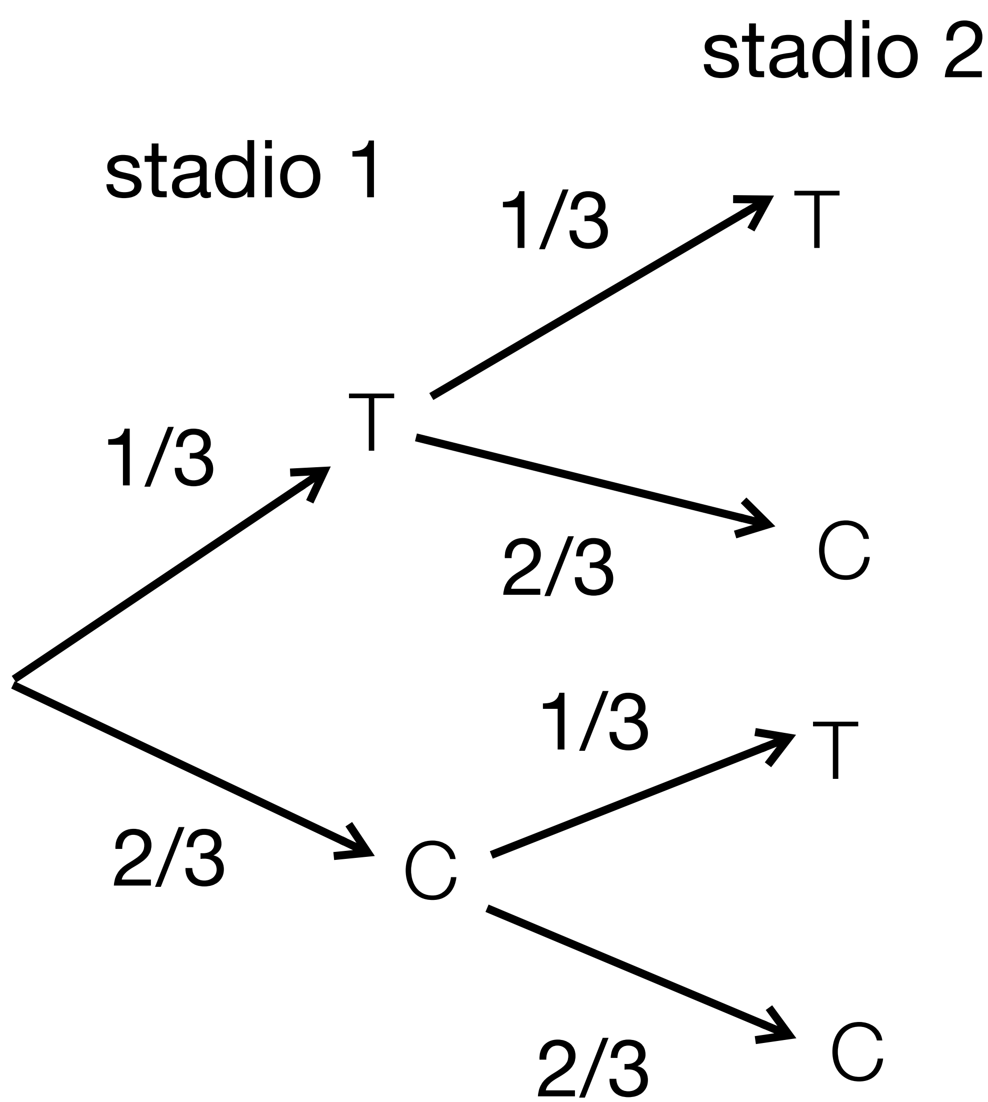


Risultati		Probabilità
T	T	P(TT)
T	C	P(TC)
C	T	P(CT)
C	C	P(CC)

la probabilità congiunta è il prodotto delle probabilità lungo il percorso

Alberi di probabilità (moneta truccata)

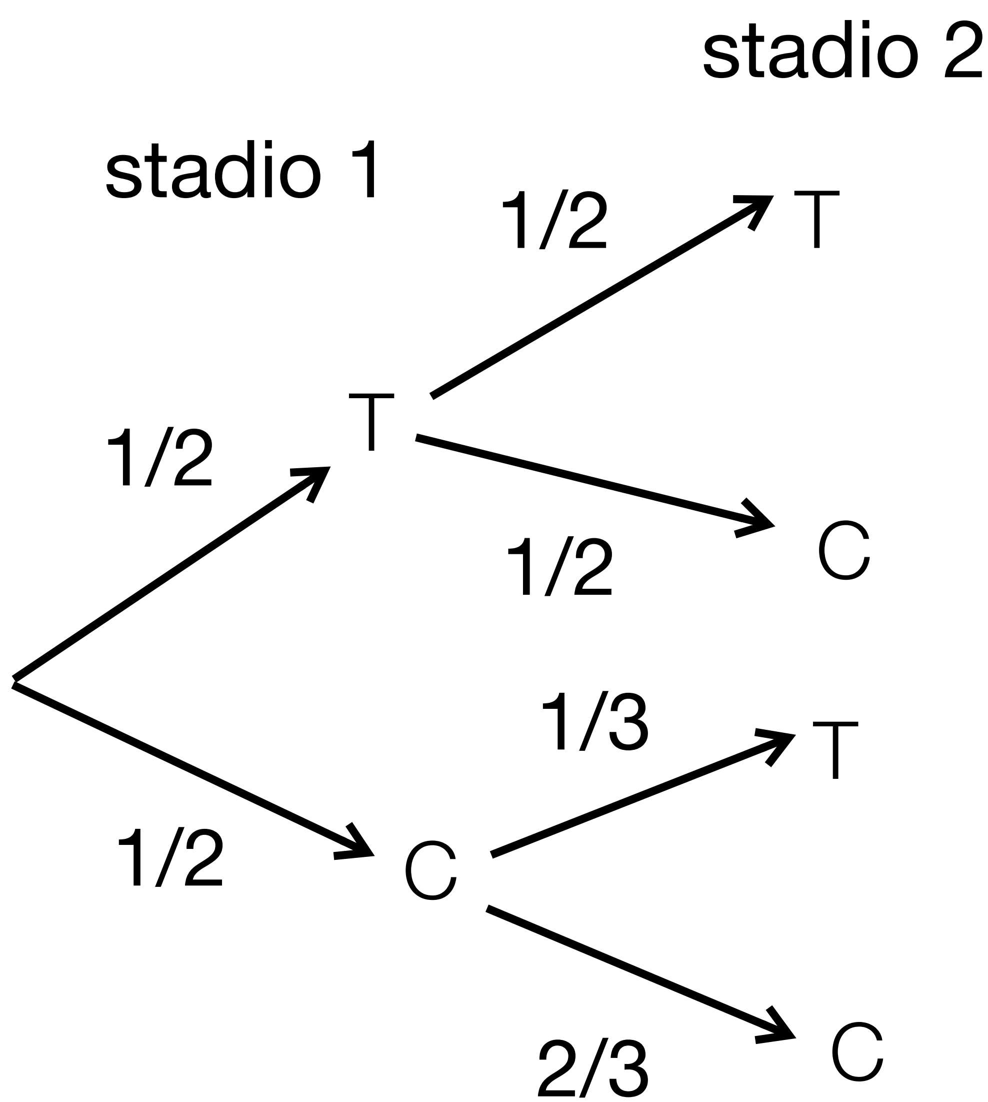
Il secondo lancio **è indipendente** dal primo



Risultati		Probabilità
T	T	1/9
T	C	2/9
C	T	2/9
C	C	4/9

Alberi di probabilità e dipendenza

Se esce croce uso la moneta truccata:
Il secondo lancio **è dipendente** dal primo



Risultati		Probabilità
T	T	1/4
T	C	1/4
C	T	1/6
C	C	2/6

Tabelle bivariate e alberi di probabilità

	lavora	non lavora	Totale
Economia	75	25	**100**
Lettere	50	50	**100**
Totale	60	40	**100**

Totale
40
60
100

probabilità condizionate

di lavoro data facoltà

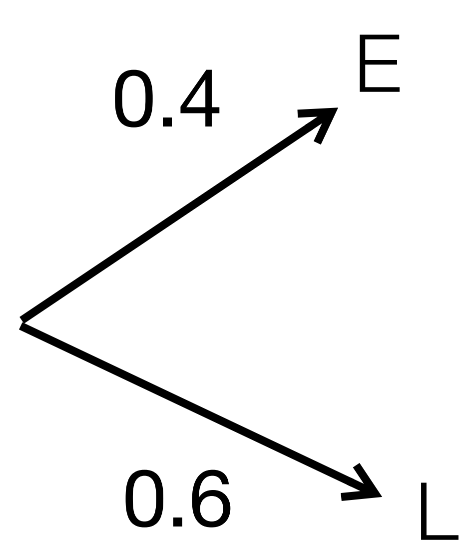
probabilità marginali

di facoltà

Tabelle bivariate e alberi di probabilità

	lavora	non lavora	Totale
Economia	75	25	**100**
Lettere	50	50	**100**
Totale	60	40	**100**

Totale
40
60
100

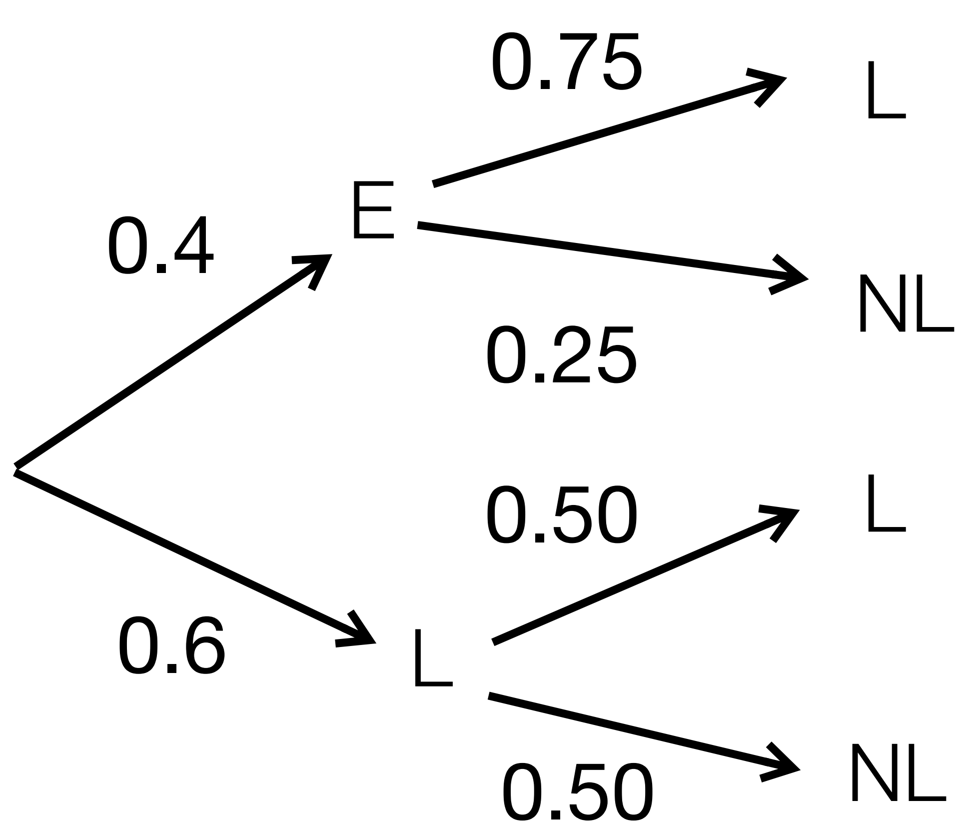


Probabilità marginali

Tabelle bivariate e alberi di probabilità

	lavora	non lavora	Totale
Economia	**75**	**25**	**100**
Lettere	**50**	**50**	**100**
Totale	60	40	**100**

Totale
40
60
100

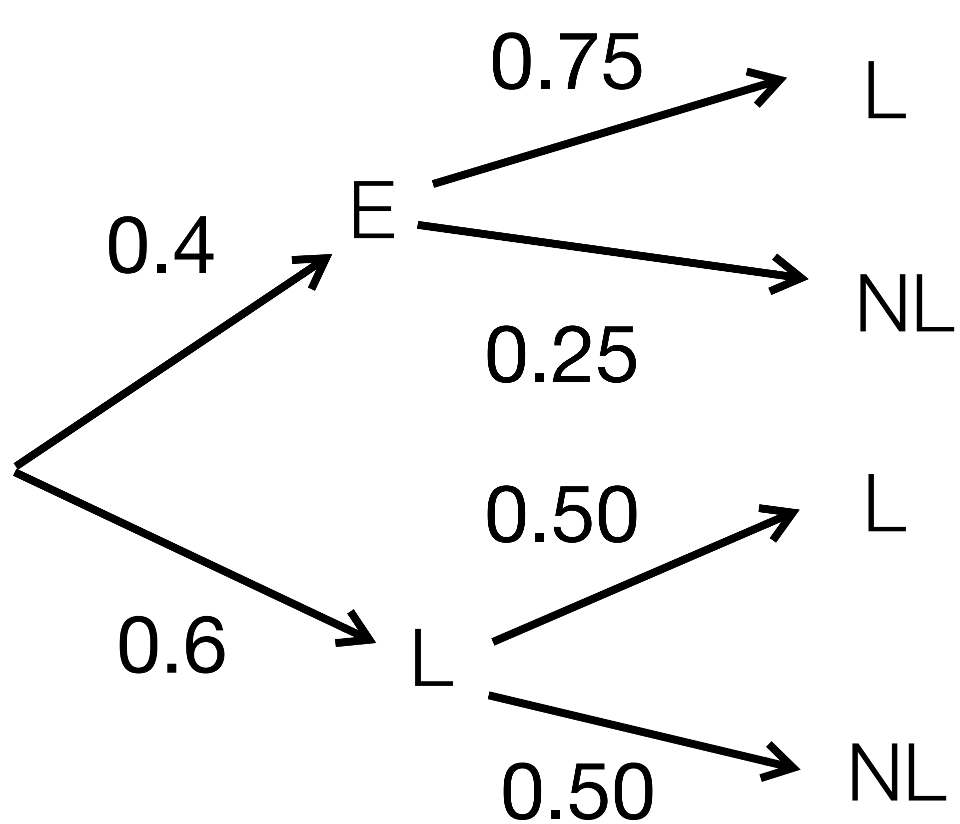


Probabilità condizionate

Tabelle bivariate e alberi di probabilità

	lavora	non lavora	Totale
Economia	30	10	40
Lettere	30	30	60
Totale	60	40	**100**

Totale
40
60
100



0,3
0,1
0,3
0,3

Probabilità congiunte

Formula di Bayes

NOTA iniziale: P(A|B) è diversa da P(B|A)

CONFRONTA:

P(Mammografia positiva| Tumore al seno)

P(Tumore al seno | Mammografia positiva)

La formula di Bayes permette di calcolare l'una dall'altra

Esempio (test diagnostico)

Circa l'1% delle donne tra 40 e 50 anni **ha un tumore al seno**

Una donna **con** il tumore al seno ha il 90% di probabilità di un test positivo alla mammografia

Una donna **senza** tumore al seno ha il 5% di probabilità di un falso positivo alla mammografia

La formula di Bayes permette di sapere **qual'è la probabilità di avere un tumore al seno se uno è risultato positivo al test**

Due passi
- Formula delle probabilità totali
- Formula di Bayes

Esempio (test diagnostico)

Circa l'1% delle donne tra 40 e 50 anni **ha un tumore al seno**

Una donna con il tumore al seno ha il 90% di probabilità di un test positivo alla mammografia

Una donna senza tumore al seno ha il 5% di probabilità di un falso positivo alla mammografia

Traduzione

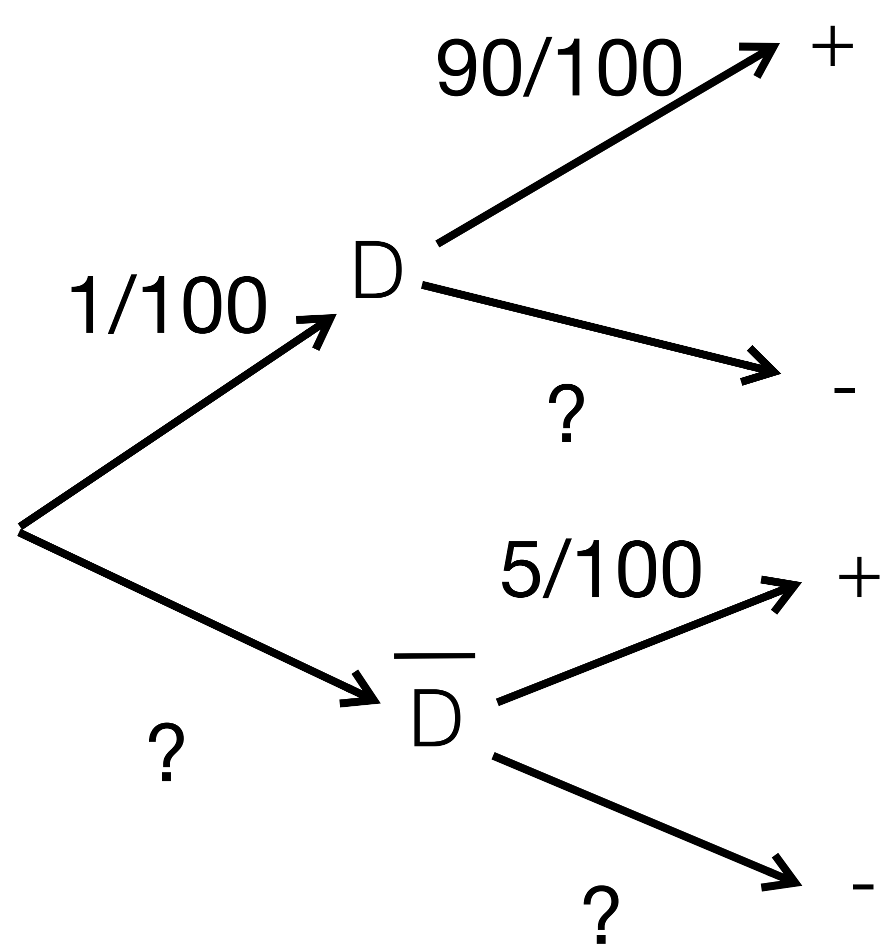
D = ha il tumore   + = Mammografia positiva

$P(D) = 0.01$ $P(+ \mid D) = 0.9$ $P(+ \mid \text{non } D) = 0.05$

Nota bene! $P(+| \text{non } D)$ è diverso da $1 - P(+|D)$

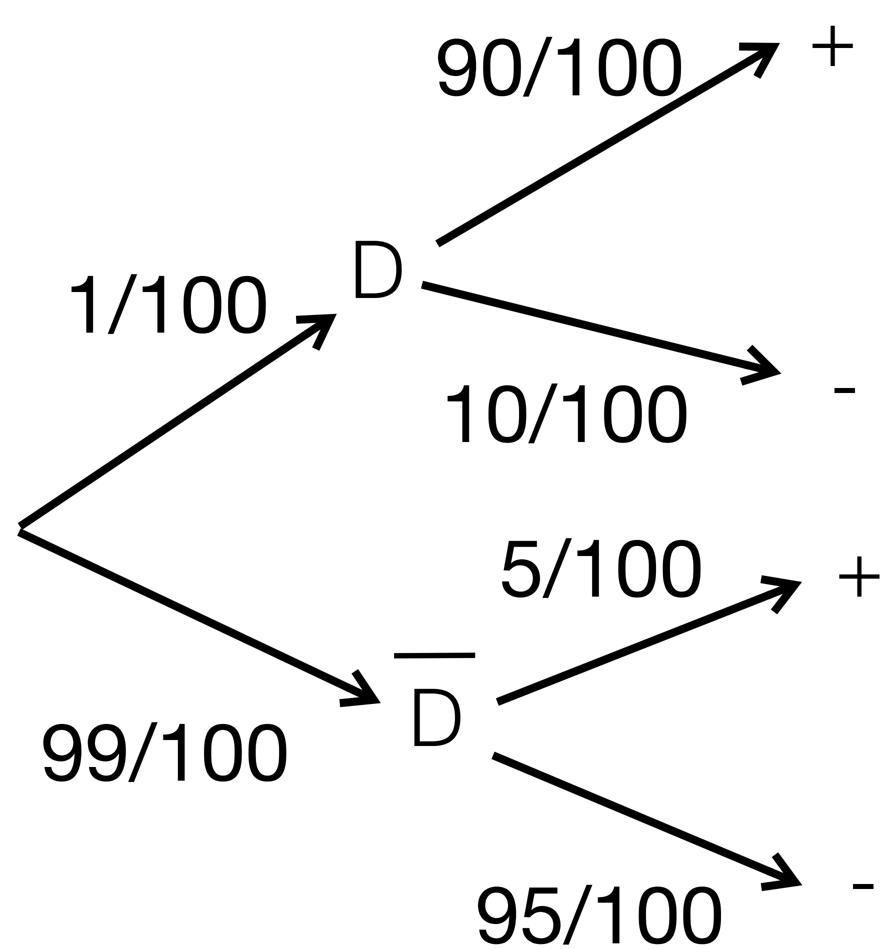
Esempio

Traduzione con un albero



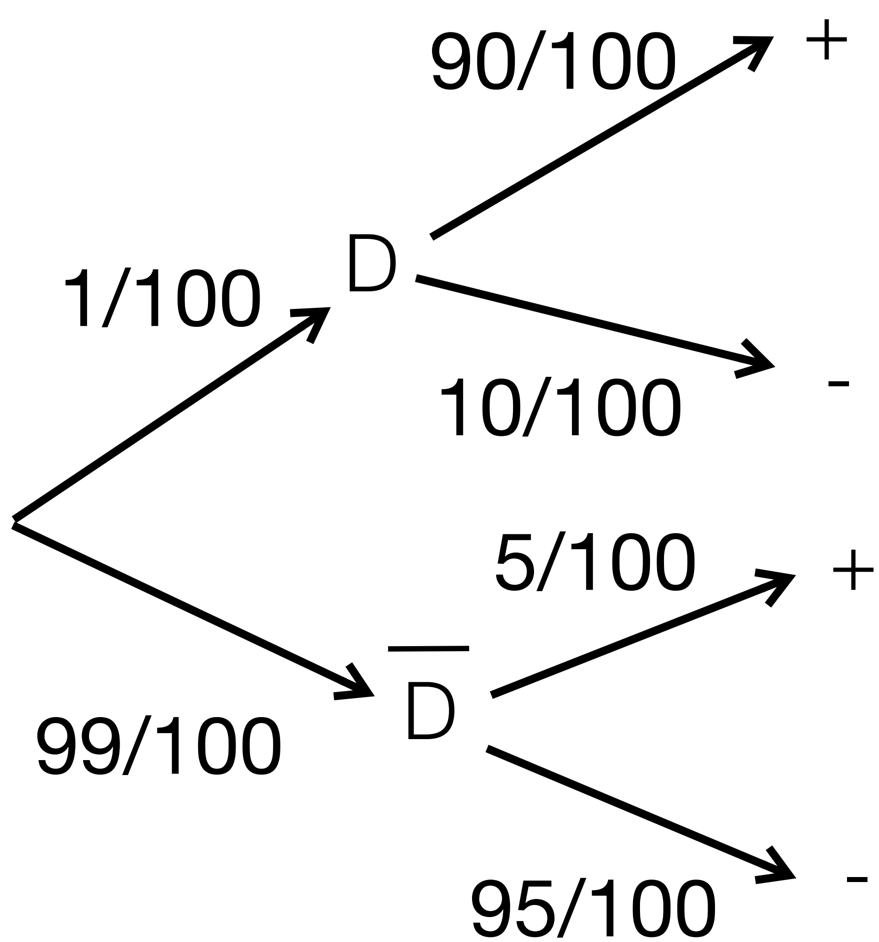
Esempio

Traduzione con un albero



Esempio

Traduzione con un albero



Probabilità

90/10000
10/10000
495/10000
9405/10000

Problema

Qual è la probabilità di test positivo?

Problema e traduzione

Qual è la probabilità di test positivo?

	Tumore sì	Tumore no	
+	90	495	
-	10	9405	
			10000

Problema e traduzione

Qual è la probabilità di test positivo?

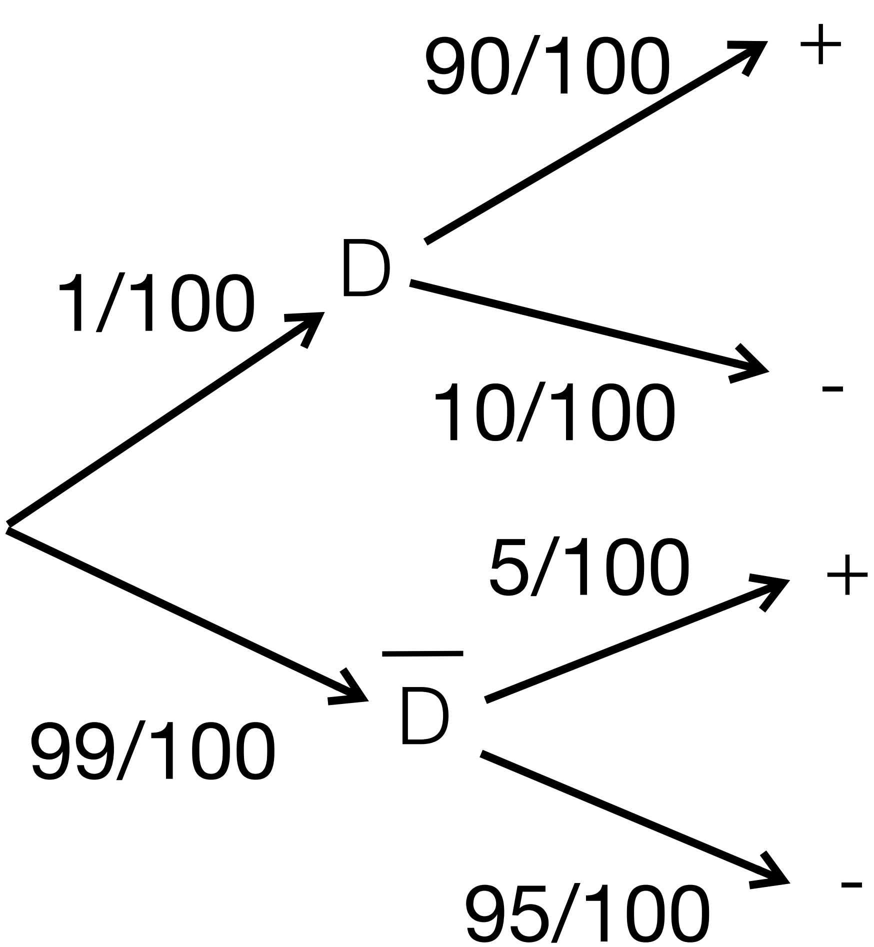
	Tumore sì	Tumore no	
+	90	495	**585**
-	10	9405	9415
	100	9900	10000

P(+) = **585/10000**

Problema e ricostruzione

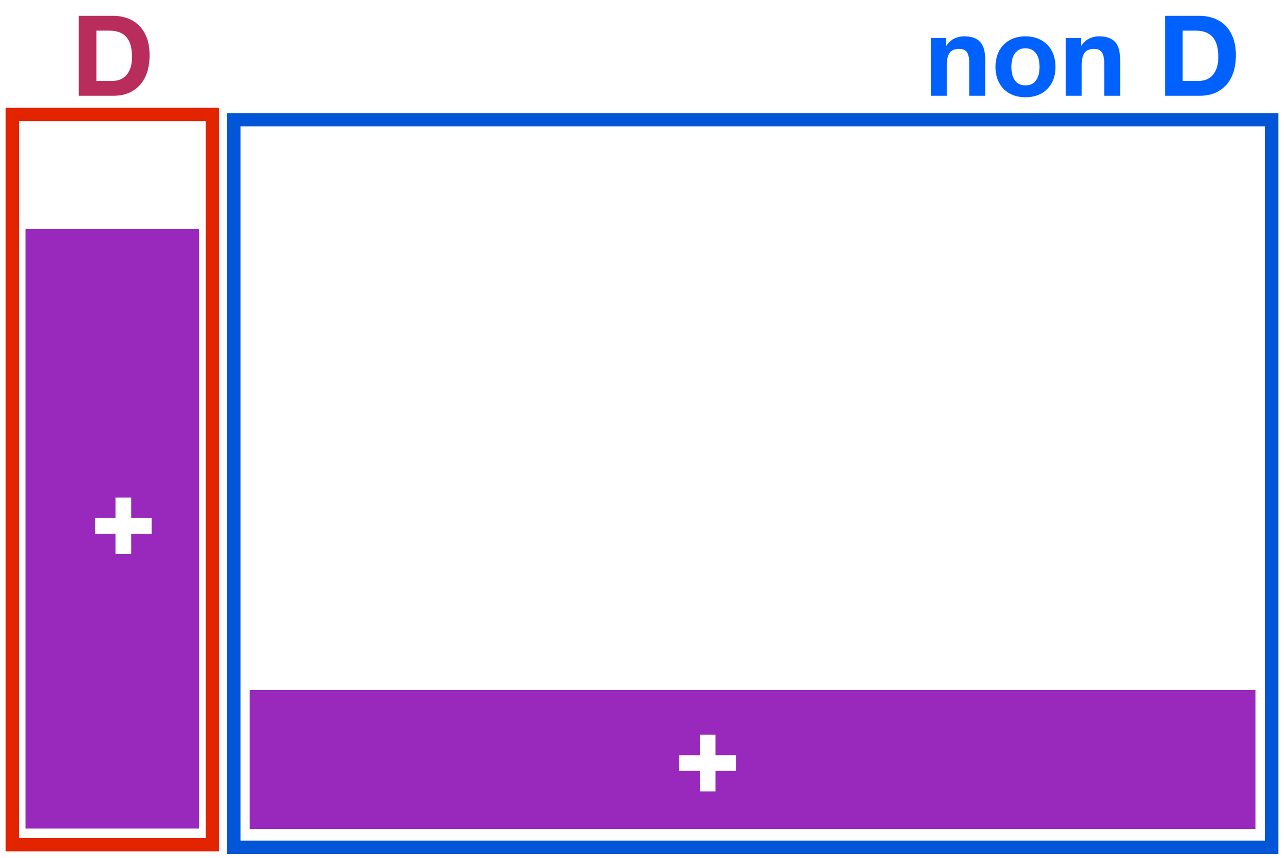
Qual è la probabilità di test positivo?

P(+) = **585/10000 =** $P(+|D)\,P(D) + P(+|\bar{D})\,P(\bar{D})$



90/10000	P(+ | D) P(D)
10/10000	
495/10000	P(+ | $\overline{D}$) P($\overline{D}$)
9405/10000	

Regola delle probabilità totali



	D	$\bar{D}$	
+	**90**	**495**	**585**
-	10	9405	9415
	100	9900	10000

D e non D sono due eventi necessari e incompatibili

$$P(+) = P(+|D)P(D) + P(+|\bar{D})P(\bar{D})$$

Formula di Bayes

La formula di Bayes permette di sapere **qual'è la probabilità di avere un tumore al seno se uno è risultato positivo al test**

Traduzione: permette di trovare P(D | +)

	Tumore sì	Tumore no	
+	90	495	**585**
-	10	9405	9415
	100	9900	10000

$$P(D|+) = \frac{P(D \cap +)}{P(+)}$$

P(D | +) = 90/585 = **0.15**

Questa è la formula di Bayes

Formula di Bayes

$$P(D|+) = \frac{P(D \cap +)}{P(+)}$$

Per definizione

regola del prodotto

$$P(D|+) = \frac{P(+|D)P(D)}{P(+|D)P(D) + P(+|\bar{D})P(\bar{D})}$$

probabilità totale

Formula di Bayes

$$P(D|+) = \frac{P(+|D)P(D)}{P(+|D)P(D) + P(+|\bar{D})P(\bar{D})}$$

Dati iniziali

P(D) = 0.01 P(+ | D) = 0.9 P(+ | non D) = 0.05

Utilizzazione della formula

$$P(D|+) = \frac{0.9 \times 0.01}{0.9 \times 0.01 + 0.05 \times 0.99} = 0.15$$

Esercizio: spam mail

Divido la posta in tre categorie
A = spam,
B = poco importante
C = importante

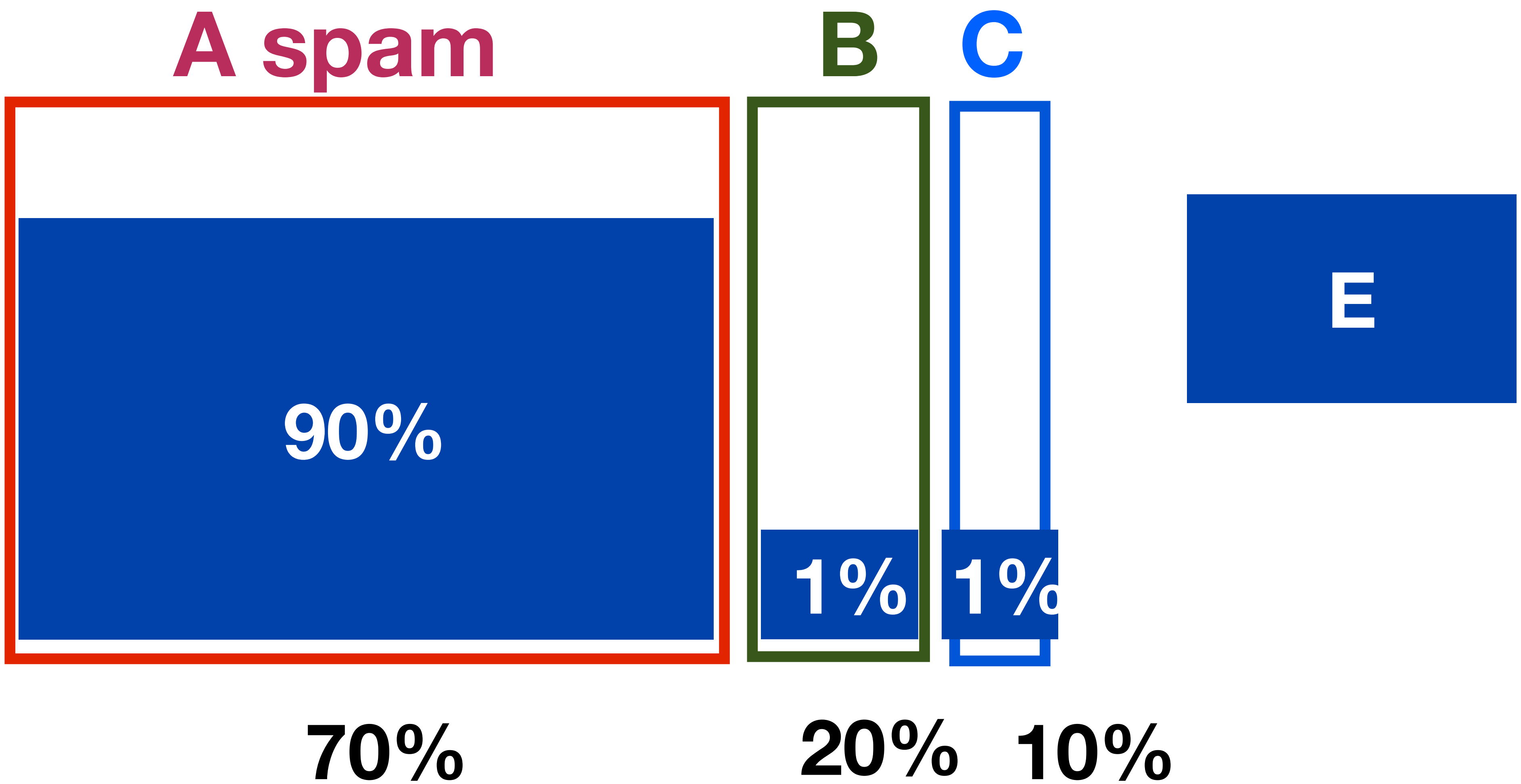
Per esperienza so che
$P(\mathbf{A}) = 0.7 \quad P(\mathbf{B}) = 0.2 \quad P(\mathbf{C}) = 0.1$

Sia **E** l'evento: *la posta contiene la parola **free***

Per esperienza so che
$P(\mathbf{E} \mid \mathbf{A}) = 0.9 \qquad P(\mathbf{E} \mid \mathbf{B}) = 0.01 \qquad P(\mathbf{E} \mid \mathbf{C}) = 0.01$

Problema: Ricevo una mail con la parola free.
Qual è la probabilità che sia spam?

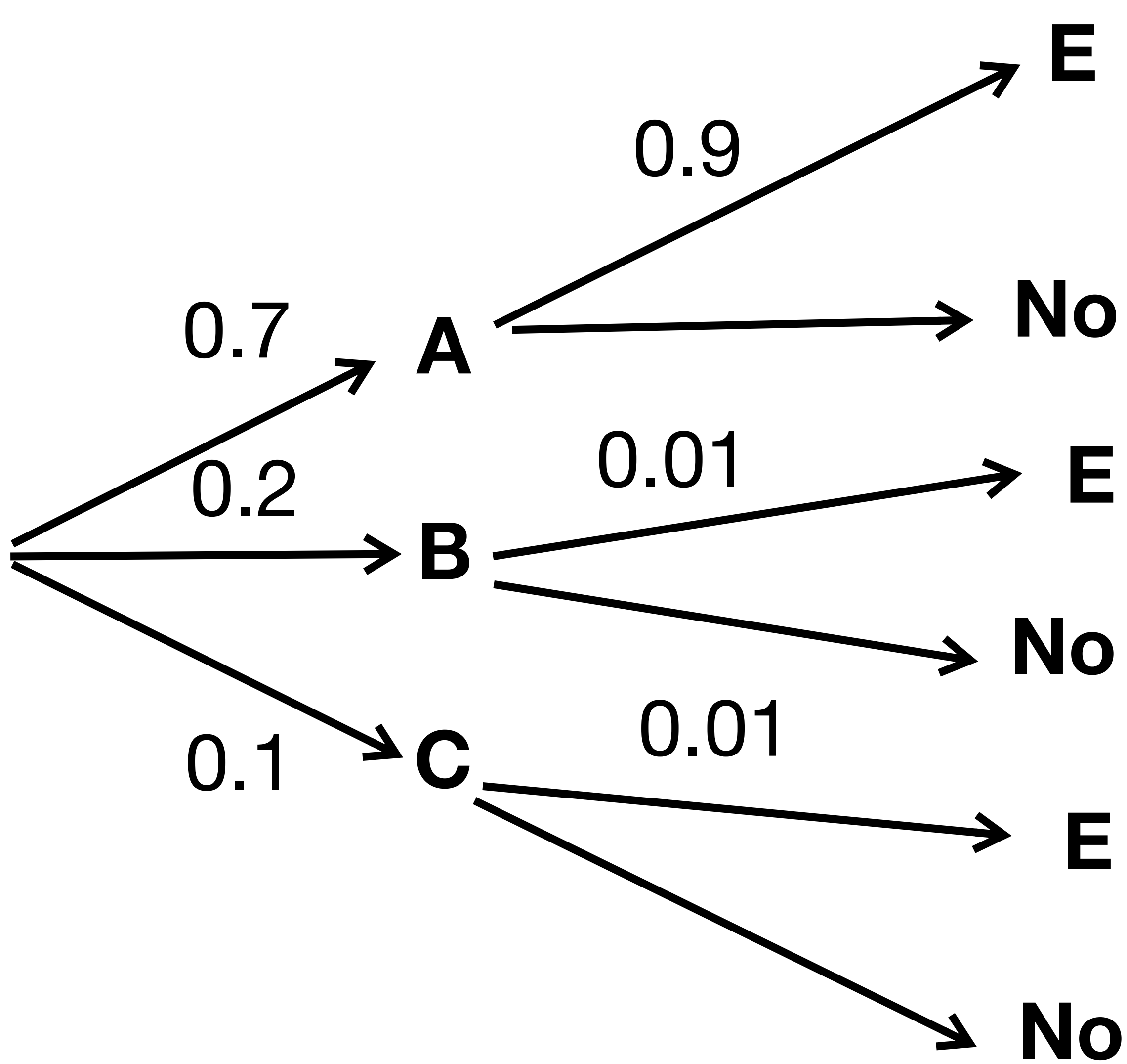
Esercizio



Probabilità che *la posta contenga la parola* ***free***

P(**E**) = 0.9 x 0.7 + 0.01 x 0.2 + 0.01 x 0.1 = 0.633

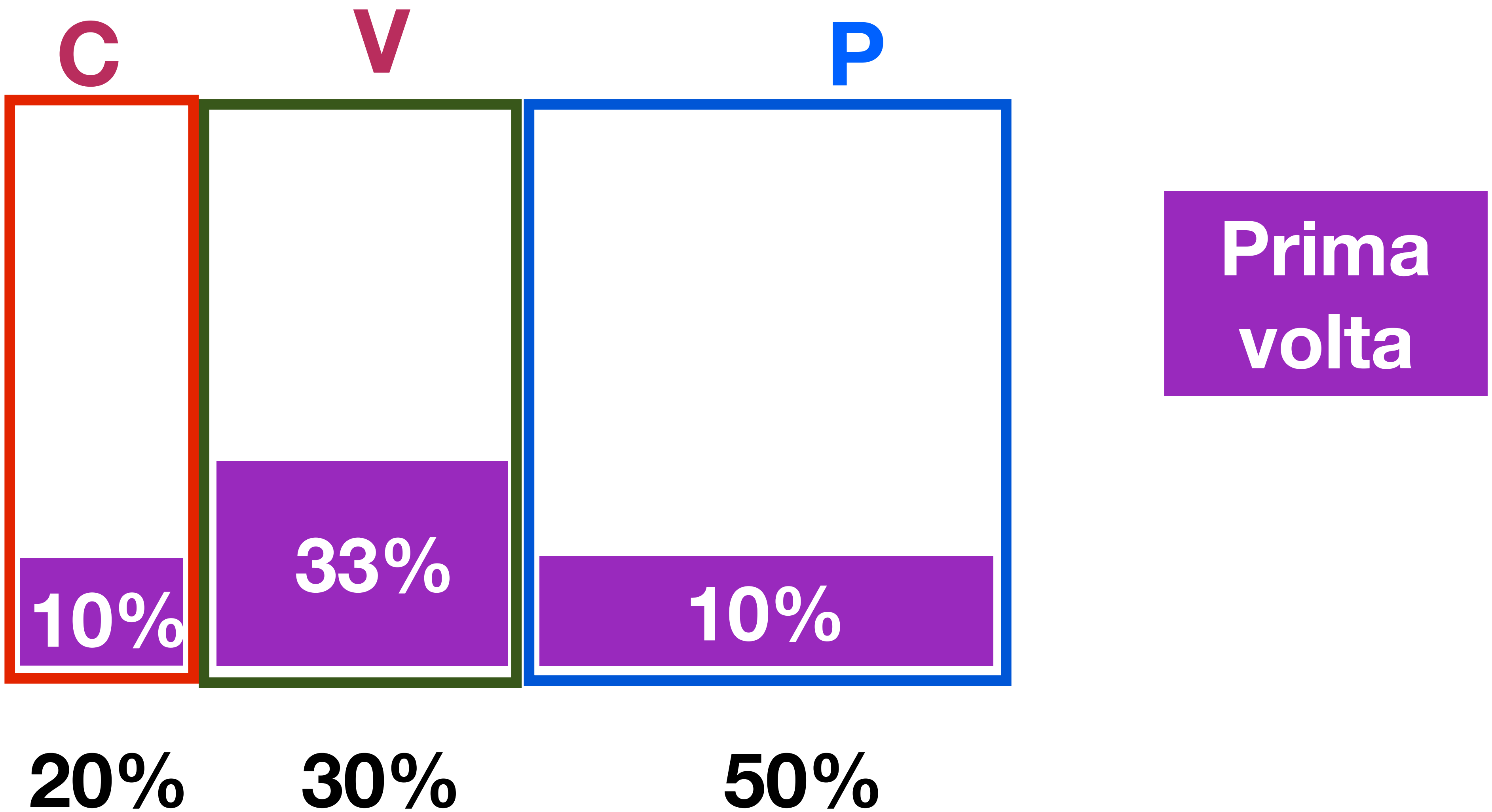
Esercizio



P(spam e free) = **0.63**

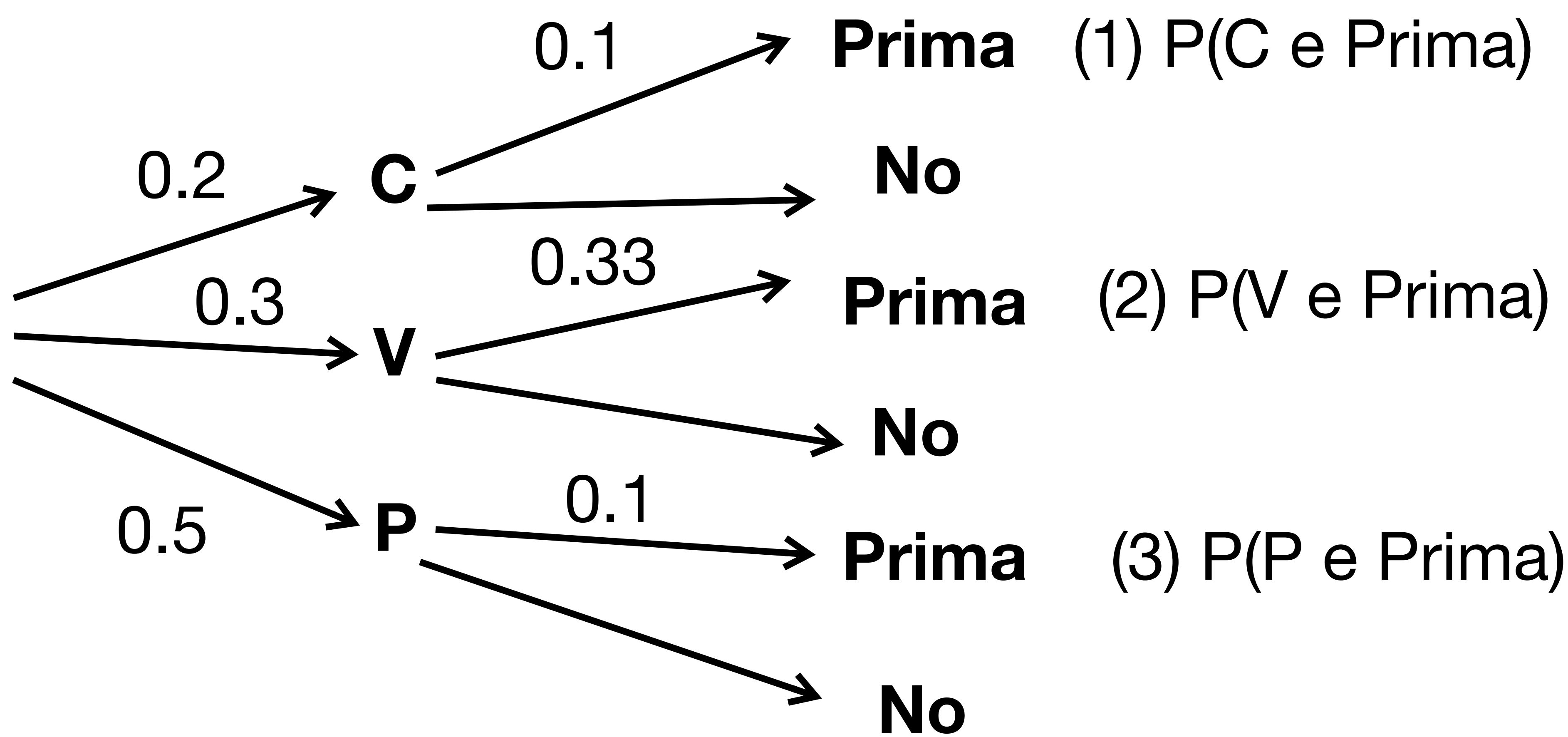
P(spam | free) = P(spam e free)/P(free) = 0.63/0.633 = **0.995** !

Esercizio



P(prima) = 0.1 x 0.2 + 0.33 x 0.3 + 0.1 x 0.5 = 0.169

Esercizio



$$P(\text{Prima}) = (1) + (2) + (3)$$