Capitolo 10 Test delle ipotesi

Stima e verifica di ipotesi

Modello di popolazione e campionamento: La popolazione viene descritta da una variabile aleatoria dipendente da un parametro incognito. Si ipotizza anche un certo tipo di estrazione casuale.

Problema di stima: si usano i dati campionari per ottenere una valutazione di quel parametro incognito.

Problema di verifica d'ipotesi: si formula un'ipotesi sul parametro e quindi si usano i dati campionari come prova per falsificare l'ipotesi. I dati possono essere incompatibili o compatibili con l'ipotesi fatta.

Esempio

Lancio una moneta per 100 volte

TTCTTCTTCTCTCTTCCTCT
CCTTTCTCTCTTTCTTTCTC
TCTCCCTTTCTCTTCTCTTC
TCTTCCTCTCCTCCTTCTTC
TCCTCCTCTCTTCCTCTTTC

È come se estraessi un campione casuale con ripetizione da una Bernoulli di parametro p = ?

Ipotesi: la moneta è bilanciata: p = 1/2

Posso verificare se i dati sono compatibili con questa ipotesi?

Esempio

Lancio una moneta per 100 volte

TTTTTTTTTTTTTTTCTTTTT
TTTTTTCTTTTTTTTTTTTTC
TTTTTTTTTTTTTTTTTTTTC
TCTTTTTTTTTTTCTTTTTCT
TTTTTTTTTTTTTCTTTTTTC

È come se estraessi un campione casuale con ripetizione da una Bernoulli di parametro p = ?

Ipotesi: la moneta è bilanciata: p = 1/2

Posso verificare se i dati sono compatibili con questa ipotesi?

Esempio

Ho un nuovo farmaco che spero possa curare più del 60% dei pazienti che soffrono di una particolare malattia.

Considero un campione casuale di 100 pazienti e somministro loro il farmaco. Alla fine valuto la proporzione dei guariti.

10011110100101101000111010101111111011111100001011
10001101111111111101111111011110111101111101111101

È come se estraessi un campione casuale con ripetizione da una Bernoulli di parametro p = ?

Ipotesi: la proporzione dei guariti è meno del 60%: $p <= 0.6$

Posso verificare se i dati confutano questa ipotesi?

Esempio

Una macchina riempe le scatole con una quantità di pasta X

X ha distribuzione **normale** - **Indipendenza** - **Identica** distribuzione

Ipotesi: La media è 500g di pasta

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad H_0 : \mu = 500$$

Campione di n = 100
I dati portano
a confutare l'ipotesi ?

490 | 079
492 | 037834
494 | 2579124447789
496 | 0344555677889904446779999
498 | 22333334456779990000011223344445
500 | 2446668833667
502 | 133614
504 | 0
506 | 6

Idea generale

Simile a quella delle prove indiziarie in un **processo**

L’ipotesi di base è come l’innocenza dell’imputato e si dà per buona

Quindi si cercano **le prove contrarie nei dati raccolti**.
Per esempio:
- la proporzione di teste è molto più grande o più piccola del 50%
- la proporzione di guariti è molto più grande del 60%
- la media osservata è diversa da 500 g

Idea generale

Di solito si propone un'**ipotesi alternativa** che serve per sapere in che direzione cercare le prove contrarie

$$H_0 : p = 1/2 \qquad H_1 : p \neq 1/2$$

$$H_0 : p \leq 0.6 \qquad H_1 : p > 0.6$$

$$H_0 : \mu = 500 \qquad H_1 : \mu \neq 500$$

L'ipotesi di partenza si dice **ipotesi nulla**

Idea generale

Come facciamo a valutare le prove contrarie?
Quando possiamo dire che l'ipotesi va rifiutata
al di là di ogni ragionevole dubbio?

L'idea è che l'ipotesi nulla va scartata
se i dati raccolti sono estremamente improbabili sotto questa ipotesi

È plausibile che p = 1/2?

TTTTTTTTTTTTTTTCTTTTT
TTTTTTCTTTTTTTTTTTTTC
TTTTTTTTTTTTTTTTTTTTC
TCTTTTTTTTTTTCTTTTTCT
TTTTTTTTTTTTTCTTTTTTC

Statistica test

In generale si è portati a rifiutare l'ipotesi nulla se la **differenza** tra questa e i dati è grande

L'indice che tipicamente si usa per misurare questa differenza è uno scarto standardizzato detto **statistica test**

$$\frac{\hat{P} - p_0}{\mathrm{ES}} \qquad H_0 : p = p_0$$

per verificare

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\mathrm{ES}} \qquad H_0 : \mu = \mu_0$$

Esempio (pasta)

Ipotesi nulla $H_0 : \mu = 500$

n = 100

Media = 497.98

s = 2.87

ES = 0.287

490 | 079
492 | 037834
494 | 2579124447789
496 | 0344555677889904446779999
498 | 2233333445677999000001122334444455
500 | 2446668833667
502 | 133614
504 | 0
506 | 6

Differenza tra dati e ipotesi = Statistica test = $\dfrac{497.98 - 500}{0.287} = -7.04$

La differenza è grande o piccola?

Esempio (dieta)

X = differenza di peso in kg per i partecipanti a una dieta

$$H_0 : \mu = 0$$

n = 36

Media = 0.0224 kg

s = 0.98 kg

ES = 0.98/6 = 0.164

-2	10
-1	6
-1	11
-0	87665
-0	433211100
0	1123444
0	5668
1	0234
1	6
2	
2	6

Differenza tra dati e ipotesi = Statistica test = $\dfrac{0.022 - 0}{0.16} = 0.14$

La differenza è grande o piccola?

Esempio (moneta)

X = 1 se testa

$$H_0 : p = 1/2$$

n = 100

$\hat{P}$ = 91/100 = 0.91

TTTTTTTTTTTTTTTCTTTTT
TTTTTTCTTTTTTTTTTTTTC
TTTTTTTTTTTTTTTTTTTTC
TCTTTTTTTTTTTCTTTTTCT
TTTTTTTTTTTTTCTTTTTTC

ES (sotto ipotesi nulla) =

$$= \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{100}} = 0.05$$

Differenza tra dati e ipotesi = Statistica test = $\dfrac{0.91 - 0.5}{0.05} = 8.2$

Esempio (moneta)

X = 1 se testa

$$H_0 : p = 1/2$$

TTCTTCTTCTCTCTTCCTCT
CCTTTCTCTCTTTCTTTCTC
TCTCCCTTTCTCTTCTCTTC
TCTTCCTCTCCTCCTTCTTC
TCCTCCTCTCTTCCTCTTTC

n = 100

$\hat{P}$ = 55/100 = 0.55

ES (sotto ipotesi nulla) =

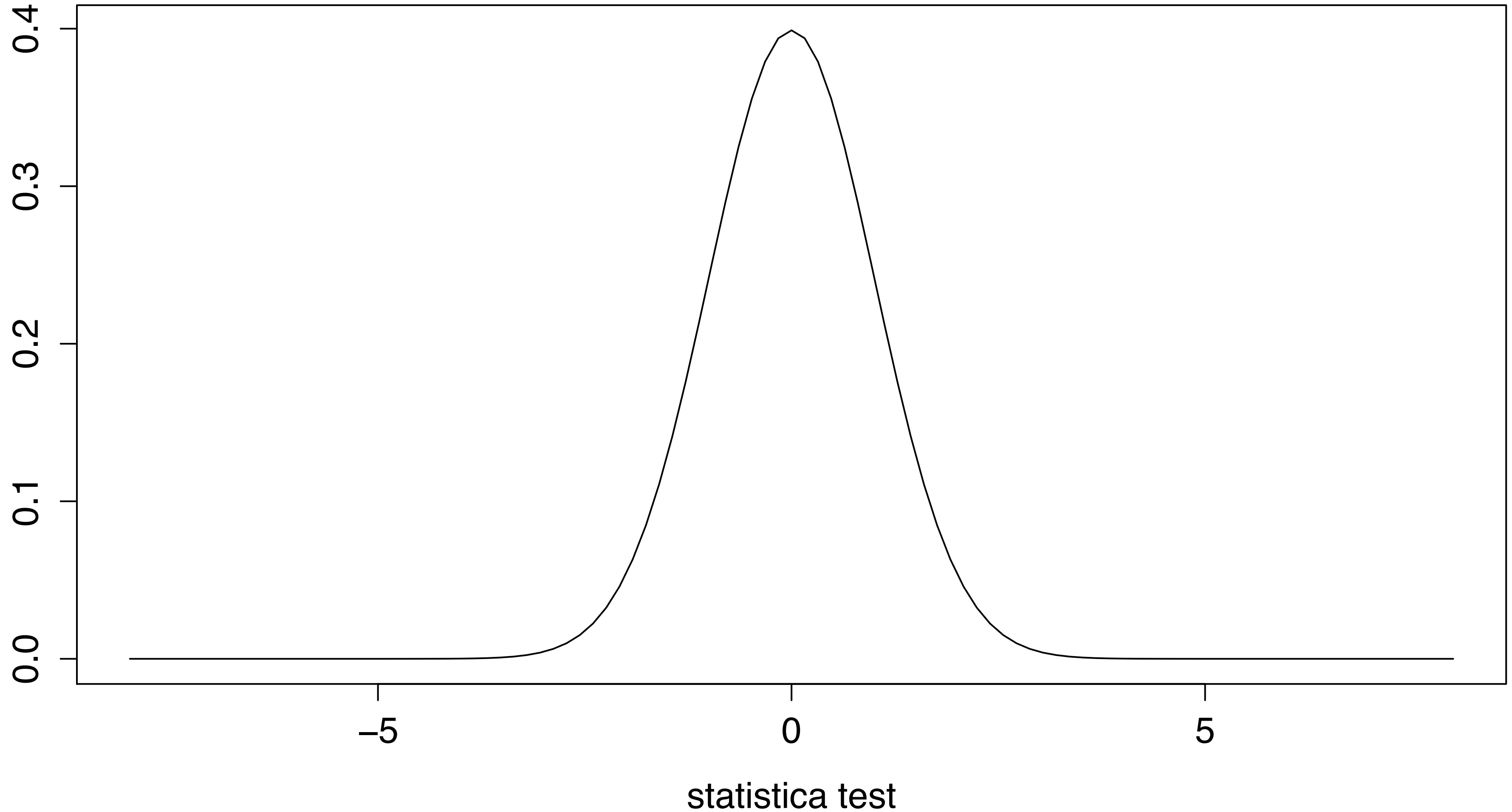
$$= \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{100}} = 0.05$$

Differenza tra dati e ipotesi = Statistica test = $$\frac{0.55 - 0.5}{0.05} = 1$$

Grande o piccola? Calibrazione

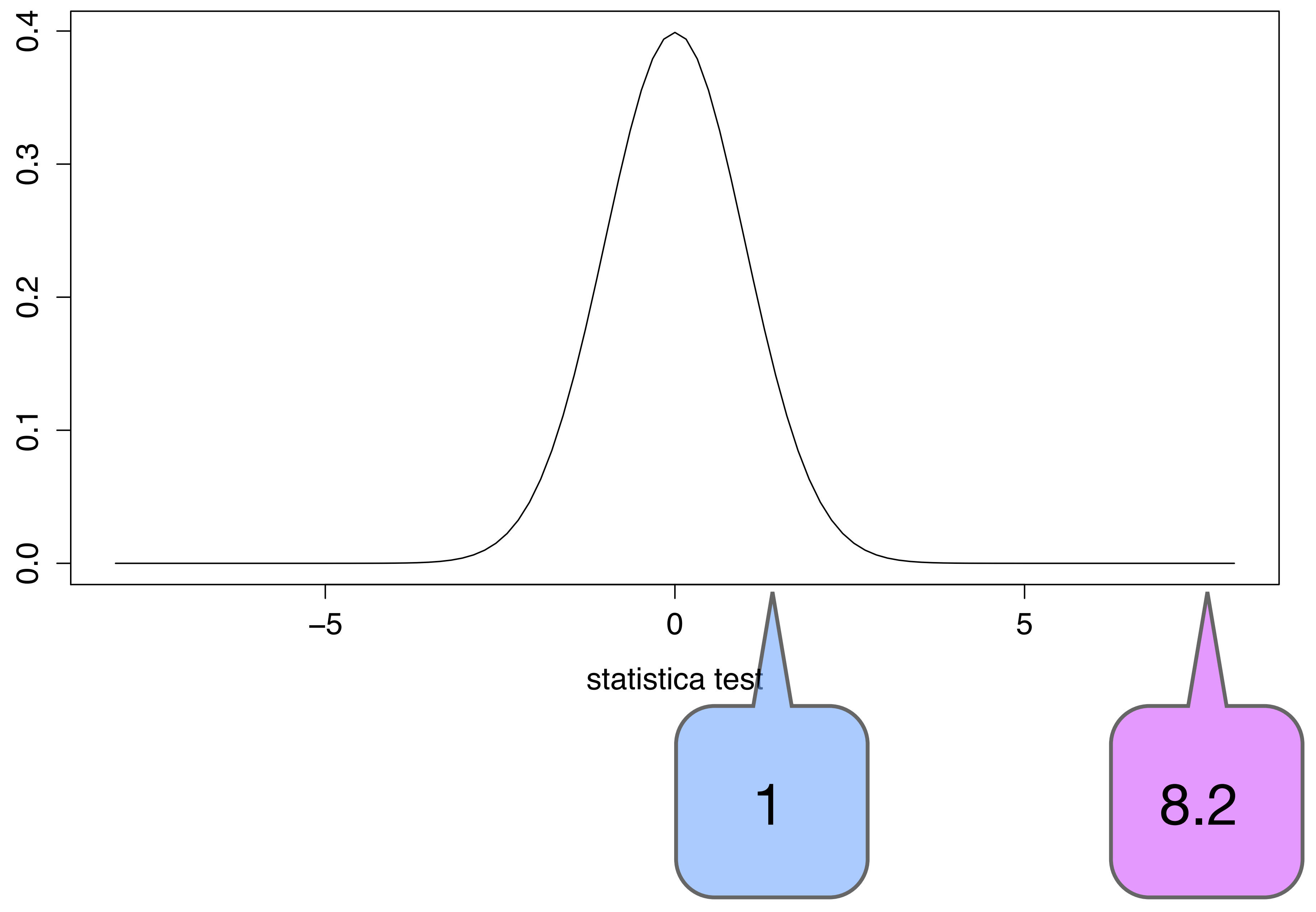
Si può calcolare come si comporta la statistica test nel campionamento ripetuto **supponendo che sia vera l'ipotesi nulla**

Per esempio se $p = 1/2$ la distribuzione della statistica test è approssimativamente $N(0, 1)$ se $np(1-p) > 9$ cioè $n > 36$



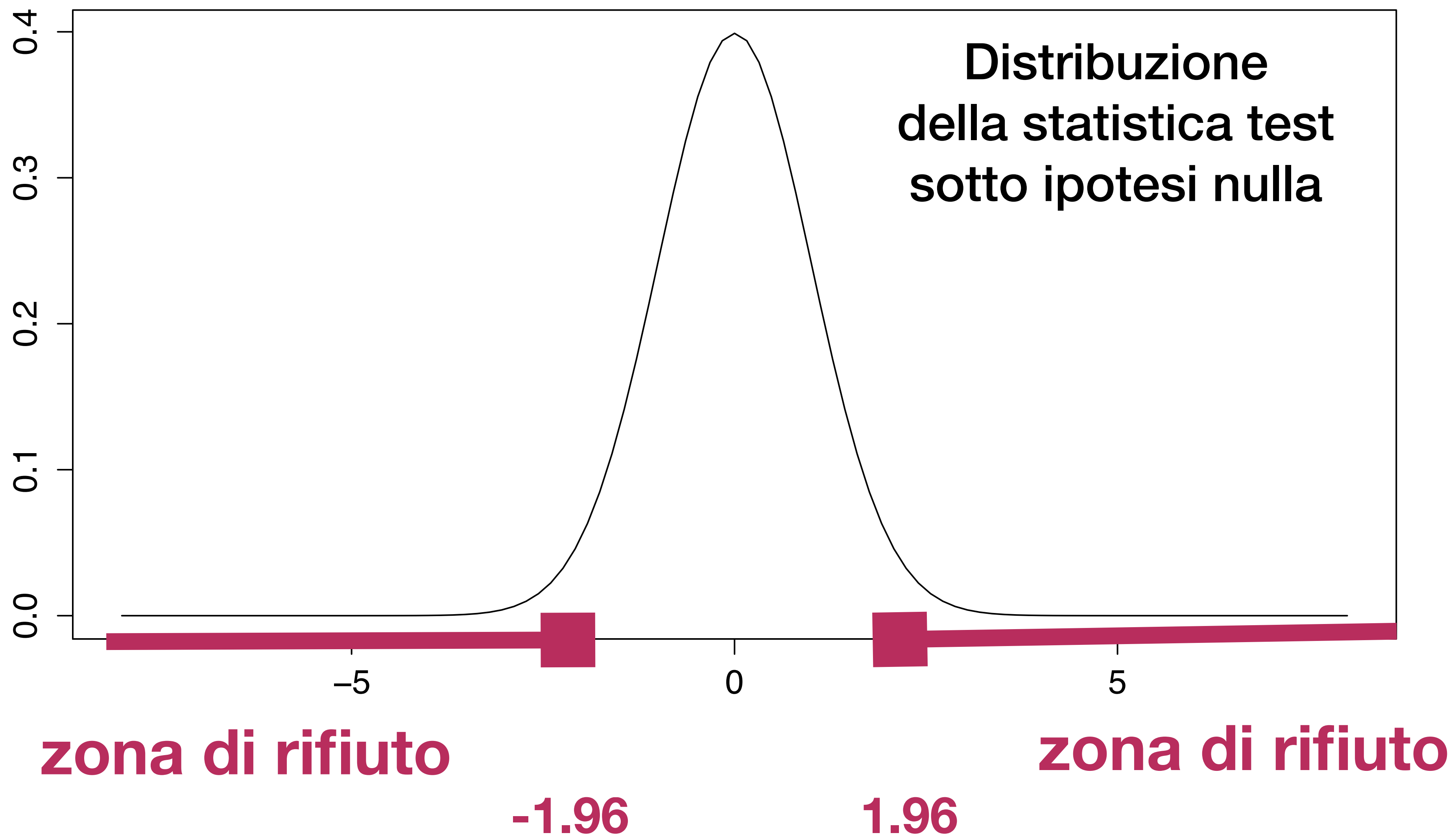
Calibrazione del test

Il valore della statistica test è grande se va a finire nelle code
Altrimenti è compatibile con l'ipotesi



Regola per decidere

Si rifiuta l'ipotesi se il valore della statistica test **va oltre certi valori critici**. Questi definiscono la **zona di rifiuto dell'ipotesi**



Cos'è un'ipotesi?

Un'ipotesi è una **affermazione circa il parametro della popolazione**

sulla media della popolazione

Esempio: In questa città, il costo medio della bolletta mensile per il cellulare è $\mu = 42$ euro

sulla proporzione nella popolazione

Esempio: In questa città, la proporzione di adulti con il cellulare è $p = 0.68$

Si riferisce sempre al parametro della popolazione, non alla statistica campionaria

Cos'è un'ipotesi?

Un'ipotesi è una **affermazione circa un parametro della popolazione**

Si definiscono un'**ipotesi nulla** e un'**ipotesi alternativa** in genere complementari

$$H_0 : \mu = \mu_0 \ \text{ contro } \ H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Le ipotesi si riferiscono sempre al parametro della popolazione, non alla statistica campionaria

Che cos'è un test delle ipotesi

Un test di ipotesi è una **regola** attraverso la quale decidere se rifiutare l'ipotesi nulla sulla base di un campione casuale

Si definisce una **regione critica** o **di rifiuto** nello spazio campionario che contiene tutti i campioni in cui la statistica test è troppo grande per poter accettare l'ipotesi

Regione critica

Supponiamo di dovere decidere sull'ipotesi

H_0: $p \geq 0.5$ contro H_1: $p < 0.5$

sulla base di un campione di 3 elementi da una Bernoulli

Spazio campionario dimensione 8

```
      100        110
000  010    101  111
 001         011
```

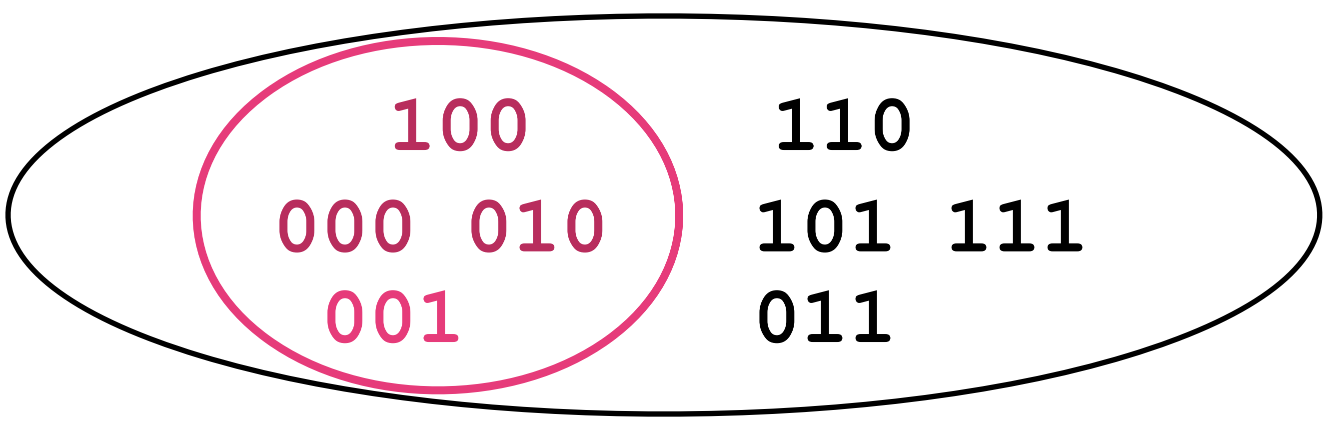
Regione critica

Supponiamo di dovere decidere sull'ipotesi

H_0: $p \geq 0.5$ contro H_1: $p < 0.5$

sulla base di un campione di 3 elementi da una Bernoulli

Spazio campionario dimensione 8



Regione critica
tutti i campioni in cui $\hat{P} \leq 1/3$

Tipi di errore

Si possono commettere due tipi di errore con una regione critica R

	Stato di Natura	
Decisione	H_0 Vera	H_0 Falsa
Non Rifiutare H_0	**No errore**	**Errore II Tipo**
Rifiutare H_0	**Errore I Tipo**	**No Errore**

Tipi di errore: conseguenze

I due tipi di errore hanno conseguenze diverse

In un test di laboratorio per l'individuazione di un certo virus se si pone

H_0 = {positivo (= soggetto malato)}
H_1 = {negativo (= soggetto sano)}

si hanno i seguenti possibili errori:

I tipo (vero H_0 ma si rifiuta): il soggetto è malato ma il test dice che è sano (**falso negativo**)
II tipo (vero H_1 ma si decide H_0): il soggetto è sano ma il test dice che è malato (**falso positivo**)

Probabilità di errore

Si possono commettere due tipi di errore con una regione critica R con probabilità

$$\alpha = P(\mathrm{I}) = P(\text{Rifiutare } H_0; H_0 \text{ vera})$$
$$\beta = P(\mathrm{II}) = P(\text{Accettare } H_0; H_0 \text{ falsa})$$

Relazioni tra gli errori

Si possono commettere due tipi di errore con una regione critica R con probabilità

$$\alpha = P(\mathrm{I}) = P(\text{Rifiutare } H_0; H_0 \text{ vera})$$
$$\beta = P(\mathrm{II}) = P(\text{Accettare } H_0; H_0 \text{ falsa})$$

L'errore di primo tipo e del secondo tipo **non si posso verificare contemporaneamente**

L'errore di primo tipo può capitare **solo se H_0 è vera**

L'errore di secondo tipo può capitare **solo se H_0 è falsa**

Relazioni tra gli errori

Si possono commettere due tipi di errore con una regione critica R con probabilità

$$\alpha = P(\mathrm{I}) = P(\text{Rifiutare } H_0; H_0 \text{ vera})$$
$$\beta = P(\mathrm{II}) = P(\text{Accettare } H_0; H_0 \text{ falsa})$$

Non si possono minimizzare simultaneamente con un campione di numerosità fissa

Se la probabilità dell'errore di primo tipo (α) $\Downarrow$

allora la probabilità dell'errore di secondo tipo (β) $\Uparrow$

Controllo dell'errore di I tipo

Si possono commettere due tipi di errore con una regione critica R con probabilità

$$\alpha = P(\mathrm{I}) = P(\text{Rifiutare } H_0; H_0 \text{ vera})$$
$$\beta = P(\mathrm{II}) = P(\text{Accettare } H_0; H_0 \text{ falsa})$$

In genere si cerca di **controllare la probabilità di errore del I tipo**

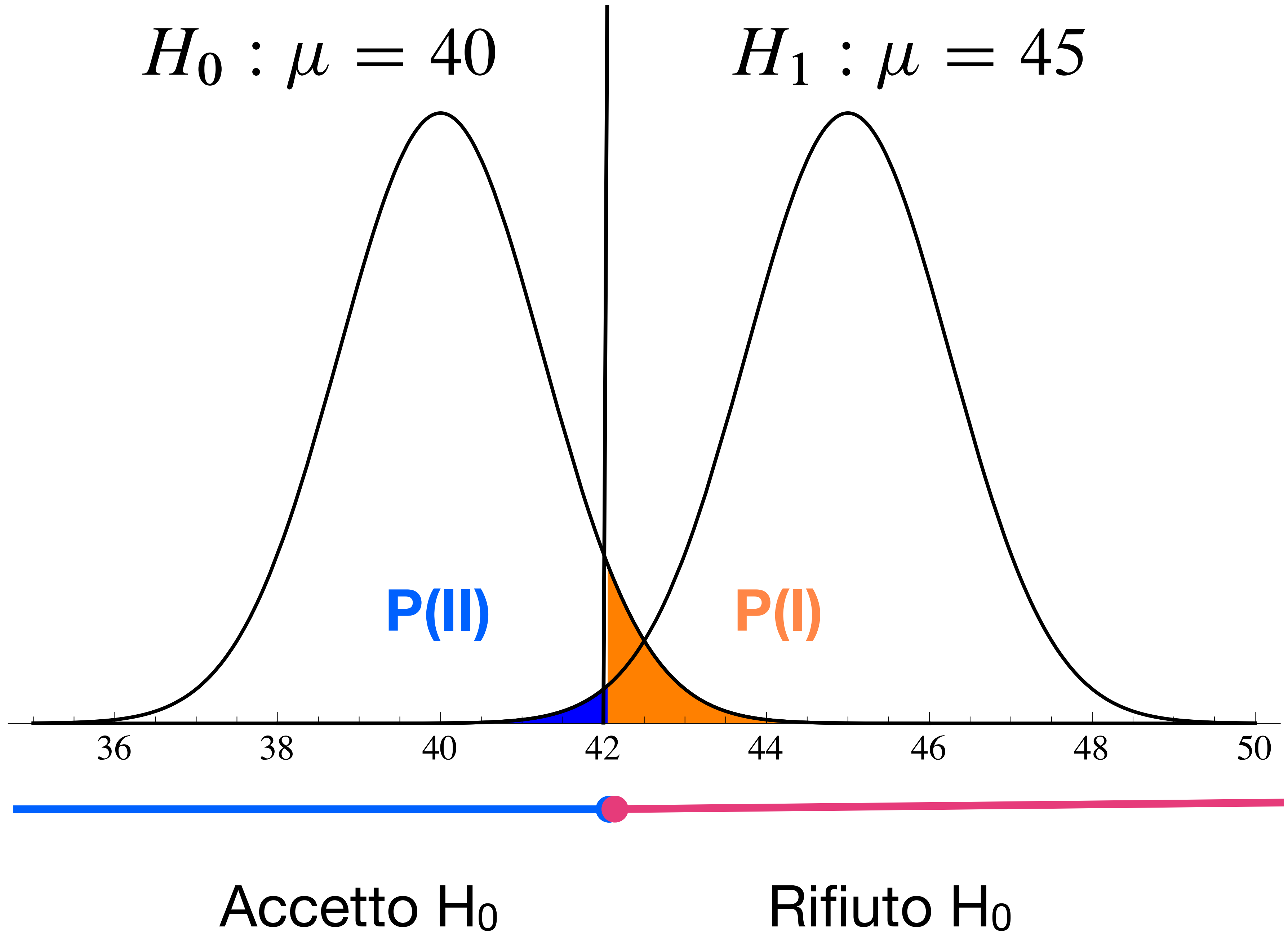
Cioè si definisce un test con una regione critica R che garantisca che nel campionamento ripetuto la proporzione α di falsi rifiuti sia **fissa e piccola** (tipo il 5% o l'1%)

Probabilità di errore

Si possono commettere due tipi di errore con una regione critica R

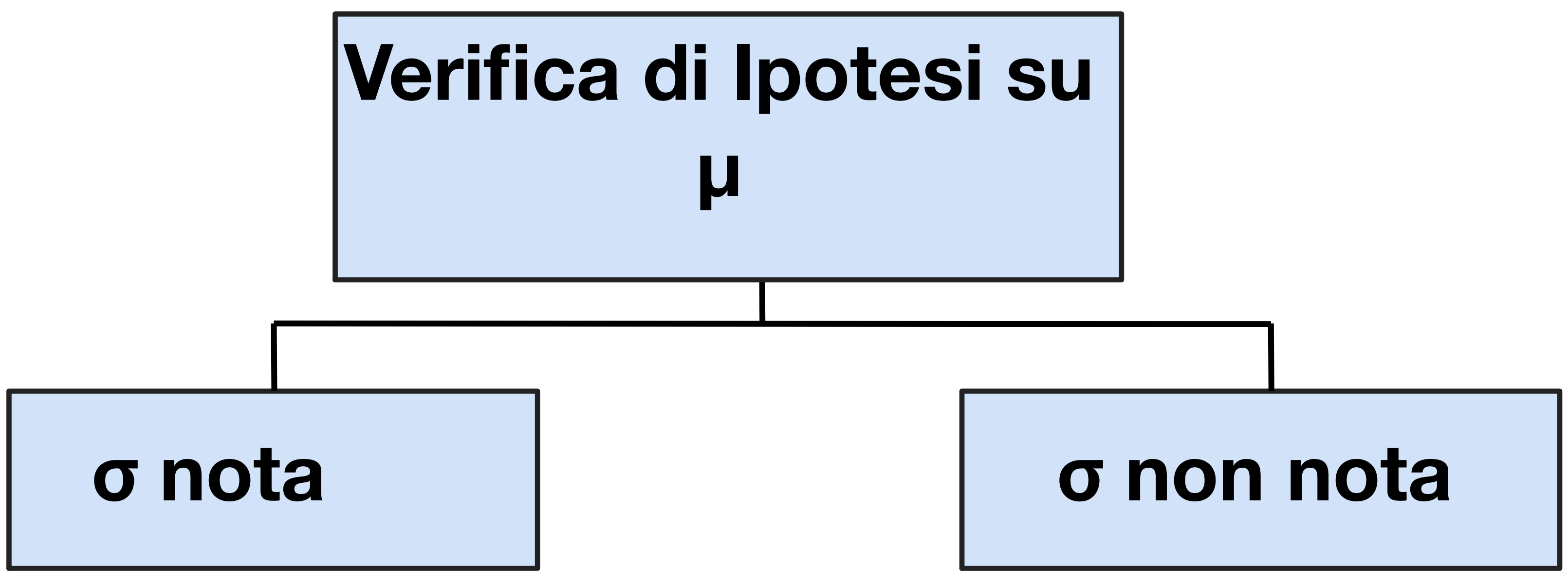
	Stato di Natura	
Decisione	H_0 Vera	H_0 Falsa
Non Rifiutare H_0	**No errore** $(1 - \alpha)$	**Errore II Tipo** (β)
Rifiutare H_0	**Errore I Tipo** (α)	**No Errore** $(1 - \beta)$

Probabilità di errore del I e II tipo



Verifica di Ipotesi sulla Media

Campione casuale da una Popolazione Normale



Esempio

Un manager di una compagnia telefonica ritiene che la bolletta mensile per il cellulare dei loro clienti sia cambiata, e che in media non sia più pari a 40 euro al mese.

La compagnia desidera verificare

$$H_0 : \mu = 40 \text{ contro } H_1 : \mu \neq 40$$

Supponiamo di sapere che
σ = 10 euro

Esempio

Raccoglie i dati su 64 clienti

{49, 38, 37, 23, 52, 48, 41, 31, 47, 46, 20, 23, 38, 44, 48, 63, 39, 30, 35, 52, 40, 51, 26, 47, 42, 41, 34, 37, 47, 37, 41, 46, 37, 43, 58, 41, 33, 35, 44, 33, 37, 19, 61, 45, 29, 40, 49, 42, 60, 48, 44, 30, 46, 43, 53, 31, 41, 33, 43, 46, 47, 50, 57, 48}

I dati portano al rifiuto di H_0?

Esempio

Raccoglie i dati su 64 clienti

{49, 38, 37, 23, 52, 48, 41, 31, 47, 46, 20, 23, 38, 44, 48, 63, 39, 30, 35, 52, 40, 51, 26, 47, 42, 41, 34, 37, 47, 37, 41, 46, 37, 43, 58, 41, 33, 35, 44, 33, 37, 19, 61, 45, 29, 40, 49, 42, 60, 48, 44, 30, 46, 43, 53, 31, 41, 33, 43, 46, 47, 50, 57, 48}

I dati portano al rifiuto di H_0?

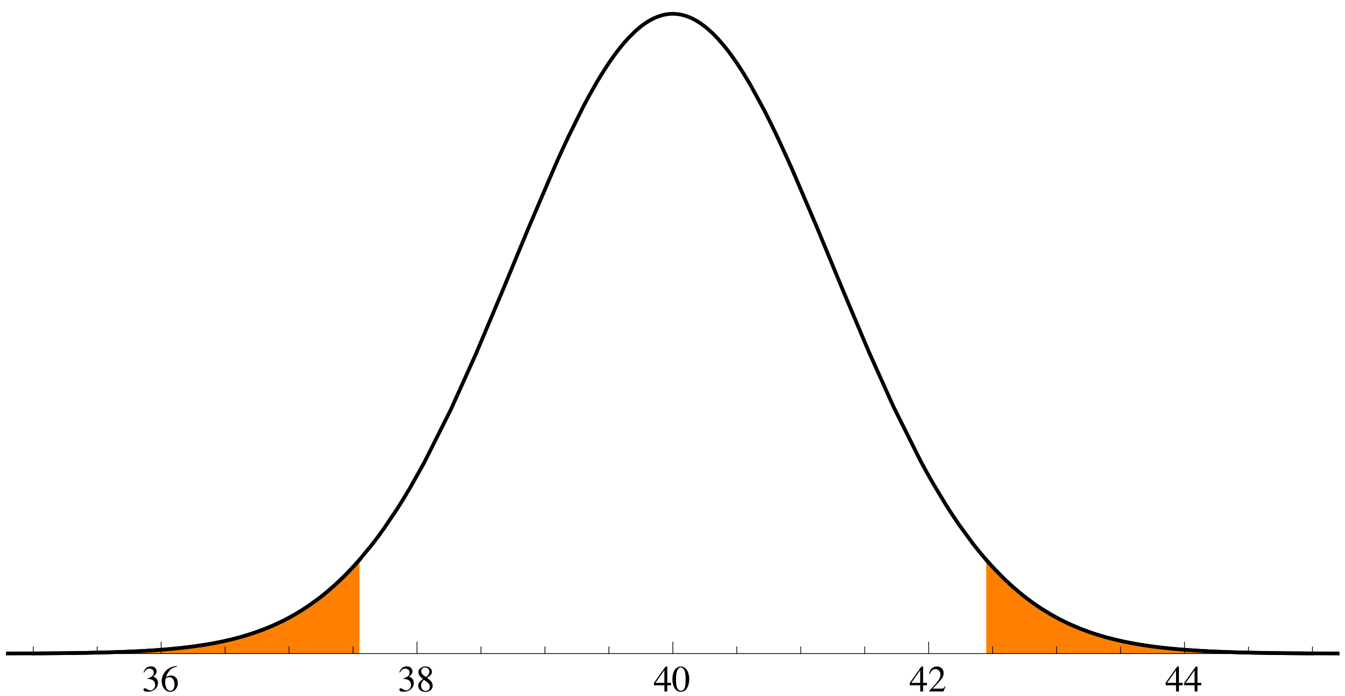
Statistica test

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{41.54 - 40}{10/\sqrt{64}} = 1.24$$

Non si rifiuta perché z è compreso tra -1.96 e 1.96

Spiegazione della regione critica

Distribuzione della media campionaria
sotto l'ipotesi $H_0 : \mu = 40$



$$
\begin{aligned}
P(\mathrm{I}) &= P(\text{Rifiutare } H_0; \mu = 40) \\
&= P(Z > 1.96 \text{ e } Z < -1.96) \\
&= 1 - P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.05
\end{aligned}
$$

Interpretazione

Utilizzando il test nel lungo andare, la probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla quando è vera è uguale a

$$\alpha = 0.05$$

La distribuzione campionaria della statistica test sotto ipotesi nulla descrive il comportamento della procedura inferenziale **nel campionamento ripetuto**

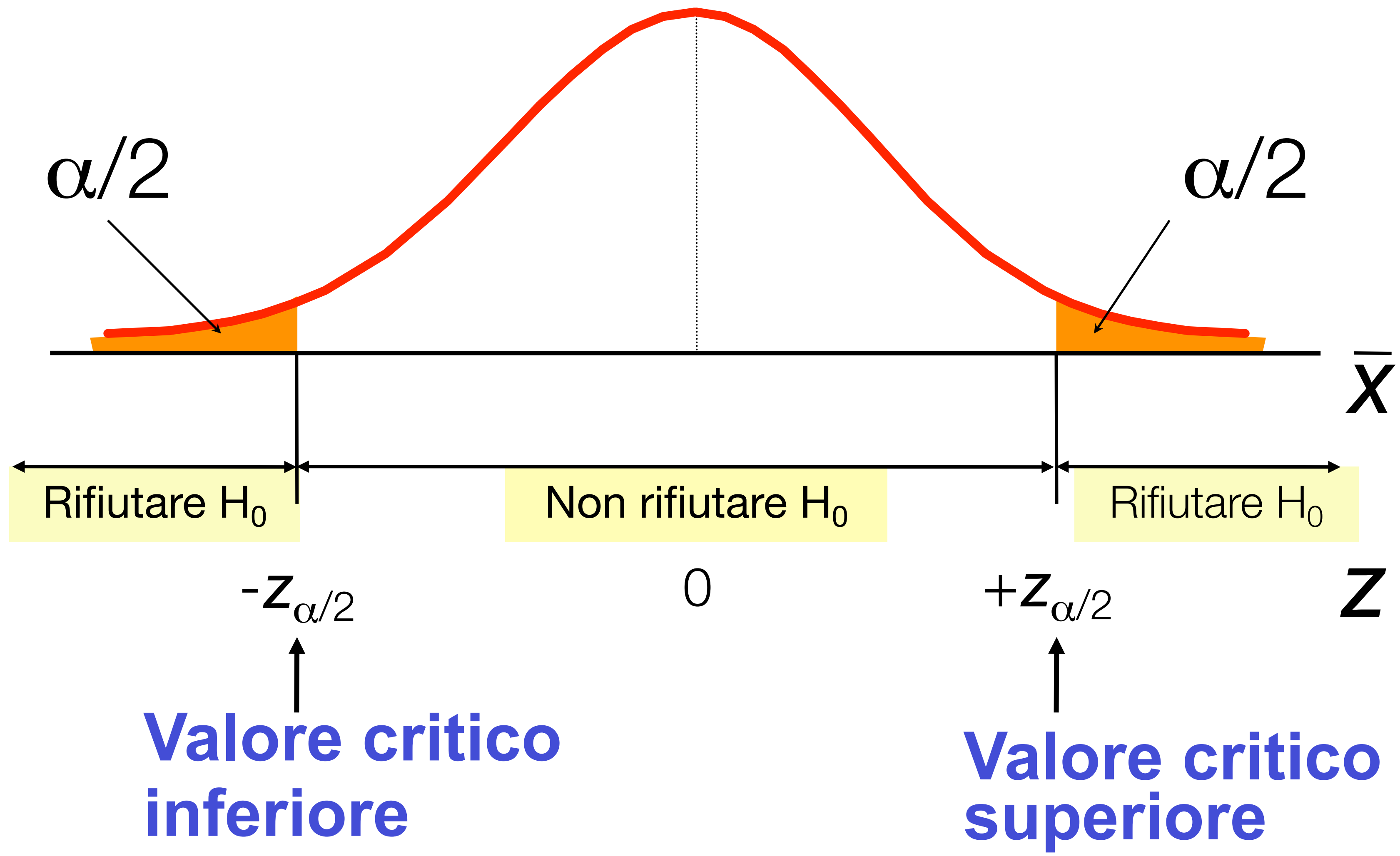
Test Bilaterali

In alcune situazioni, l'ipotesi alternativa non specifica un'unica direzione

H_0: μ = 40

H_1: $\mu \neq$ 40

Ci sono due valori critici, che definiscono le due regioni di rifiuto



Test Unilaterali

In molti casi, l'ipotesi alternativa si concentra su una particolare direzione

H_0: $\mu \leq 40$

H_1: $\mu > 40$

Questo è un test sulla coda **di destra** siccome l'ipotesi alternativa è focalizzata sulla coda di destra, al di sopra della media 40

H_0: $\mu \geq 40$

H_1: $\mu < 40$

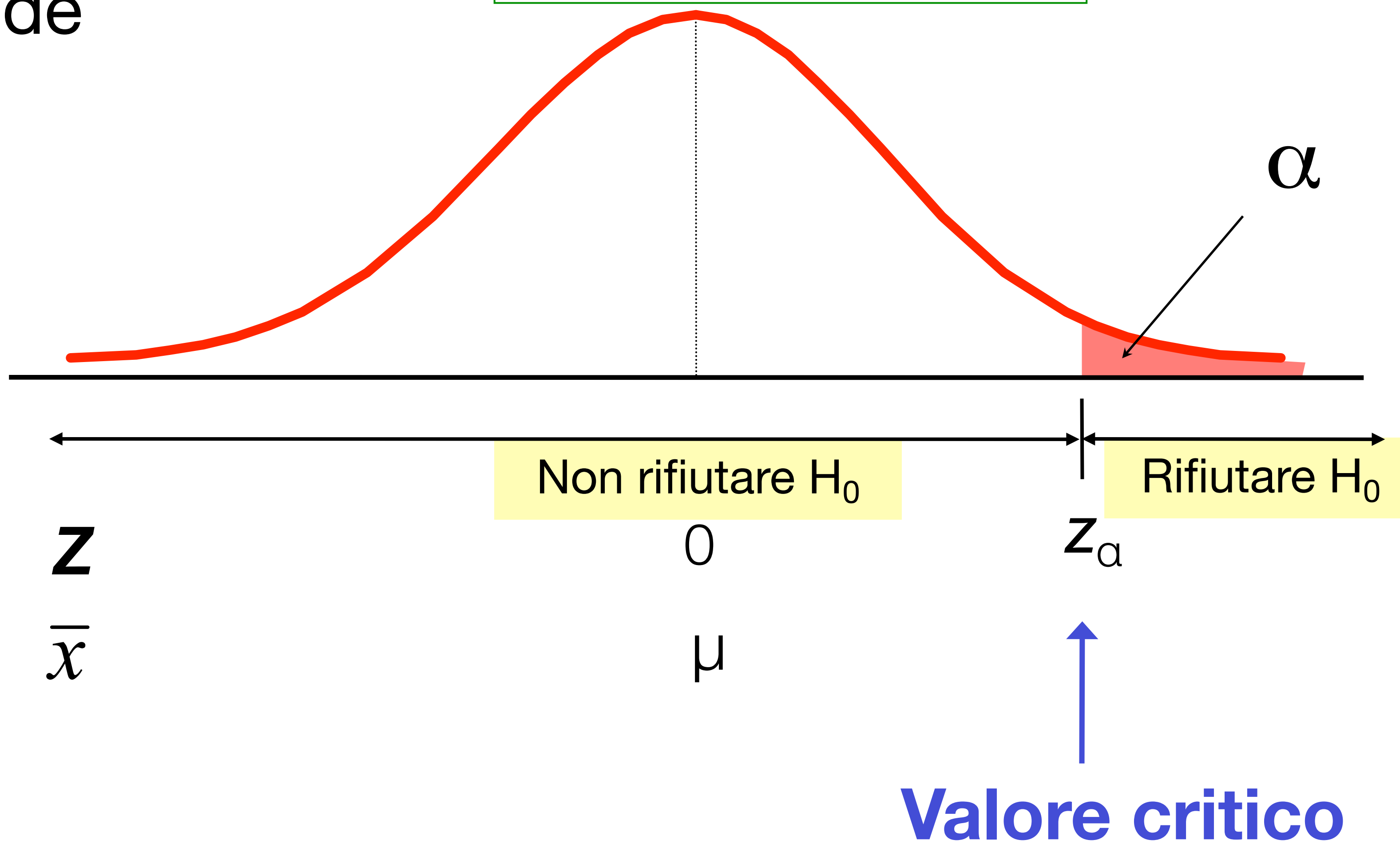
Questo è un test sulla coda **di sinistra** siccome l'ipotesi alternativa è focalizzata sulla coda di sinistra, al di sotto della media 40

Test sulla coda di destra

C'è solo un valore critico, siccome l'area di rifiuto è solo in una delle code

H_0: $\mu \leq 40$

H_1: $\mu > 40$

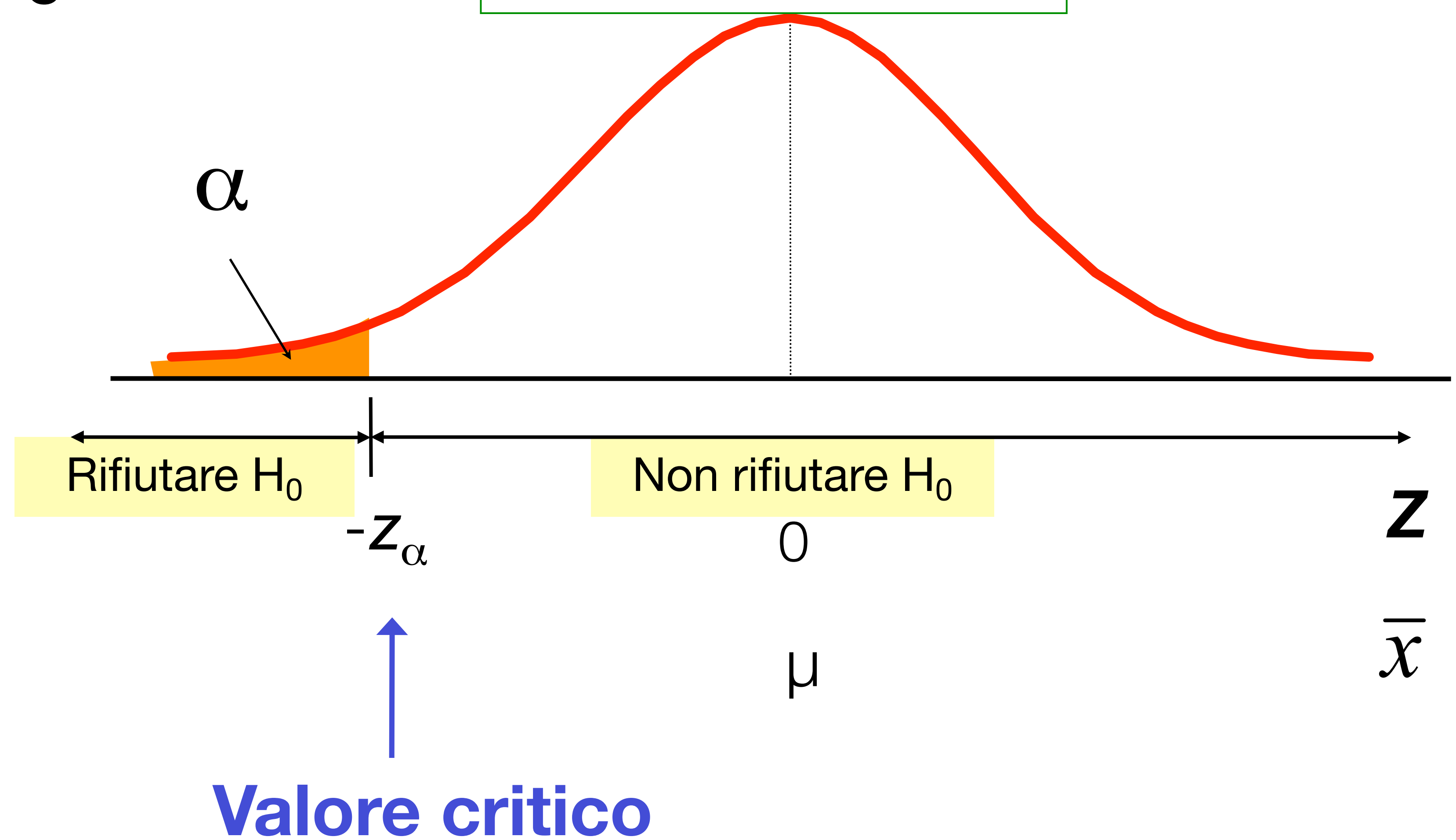


Test sulla coda di sinistra

C'è solo un valore critico, siccome l'area di rifiuto è solo in una delle code

H_0: $\mu \geq 40$

H_1: $\mu < 40$



Regioni critiche se la varianza è nota

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Statistica test	max P(I)	Regione critica
$z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	0.05	z > 1.96 z < -1.96
	0.01	z > 2.58 z < -2.58
	α	$z > z_{\alpha/2} \quad z < -z_{\alpha/2}$

Regioni critiche se la varianza è nota

$$H_0 : \mu \leq \mu_0, \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

Statistica test	max P(I)	Regione critica
$z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	0.05	z > 1.645
	0.01	z > 2.33
	α	$z > z_\alpha$

Regioni critiche se la varianza è nota

$$H_0 : \mu \geq \mu_0, \quad H_1 : \mu < \mu_0$$

Statistica test	max P(I)	Regione critica
$z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	0.05	z < -1.645
	0.01	z < -2.33
	α	$z < -z_\alpha$

Esempio

Per controllare il processo produttivo di una falegnameria vengono esaminate 10 tavole, il cui spessore medio è di 6.07 mm.
La deviazione standard della popolazione è 0.1 mm.

Test dell'ipotesi $$H_0 : \mu \leq 6, \quad H_1 : \mu > 6$$

La statistica test è $$z = \frac{6.07 - 6}{\sqrt{0.01/10}} = 2.21$$

Al livello di errore del 5% si è portati a **rifiutare** l'ipotesi

Al livello di errore dell'1% si è portati a **non rifiutare** l'ipotesi

L'evidenza è **significativa**, ma non **altamente significativa**

Regioni critiche se la varianza non è nota

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu \neq 0$$

Statistica test	max P(I)	Regione critica
$\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	α	$t > t_{n-1,\alpha/2} \;\; t < -t_{n-1,\alpha/2}$
n = 10	0.05	t > 2.262 t < -2.262
n = 10	0.01	t > 3.250 t < -3.250

Regioni critiche se la varianza non è nota

$$H_0 : \mu \geq \mu_0, \quad H_1 : \mu < \mu_0$$

Statistica test	max P(I)	Regione critica
$\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	α	$t < -t_{n-1,\alpha}$
n = 10	0.05	t < -1.833
n = 10	0.01	t < -2.821

Esempio

Esercizio 10.16

Un centro di ricerca ritiene che con un nuovo sistema le auto percorrano in media 3km in più per ogni litro di benzina.

Si estrae un campione di 100 automobili e si misurano gli incrementi X di percorrenza rispetto al normale

la media campionaria è 2.4 km/l
con una deviazione standard s = 1.8 km/l

Verificare l'ipotesi che l'incremento medio sia almeno 3 km/l con un test di livello 5%

Esempio

$$H_0 : \mu \geq 3, \quad H_1 : \mu < 3 \qquad \alpha = 0.05$$

$$(X_1, \ldots, X_n) \text{ IID } N(\mu, \sigma^2)$$

$$\bar{X} = 2.4 \quad s = 1.8 \quad n = 100$$

$$\mathrm{ES} = s/\sqrt{n} = 1.8/10 = 0.18$$

Statistica test $\quad t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\mathrm{ES}} = \dfrac{2.4 - 3}{0.18} = -3.33$

Valore critico $\quad -t_{99,0.05} = -1.645$

Regione critica $\quad$ t < -1.645 $\qquad$ **Rifiuto**

Calcolo della probabilità di errore di primo tipo

Come manager di un fast food sei responsabile del controllo della qualità. Vuoi essere sicuro che gli hamburger surgelati consegnati dal tuo fornitore pesino in media 4 once.

Sai già che la deviazione standard del peso degli hamburger è 0.1 once.

Per rifiutare una consegna di hamburger, usi questa **regola di decisione**. Rifiuti la consegna se il peso medio di un campione casuale di 20 hamburger è inferiore a 3.95 once.

Quale è il livello di significatività associato a questa regola di decisione?

Calcolo di P(I)

Probabilità di rifiutare H_0 quando è vera

$$\alpha = P(\bar{X} < 3.95; H_0 \text{ vera})$$

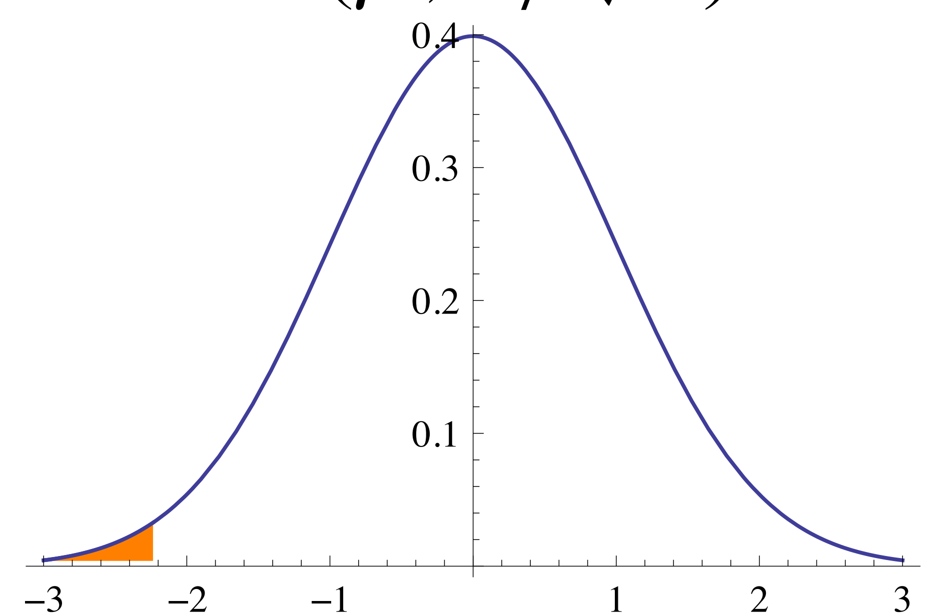
Allora, se H_0 quando è vera

$$\alpha = P(\bar{X} < 3.95; \mu = 4), \quad \bar{X} \sim N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$$

$$= P\left(Z < \frac{3.95 - 4}{0.1/\sqrt{20}}\right)$$

$$= P(Z < -2.236)$$

= 1- 0.987126 = **0.013**



Verifica di ipotesi e p-value

Un modo per calibrare il test è anche quello di calcolare, dopo aver ottenuto il valore della statistica test,

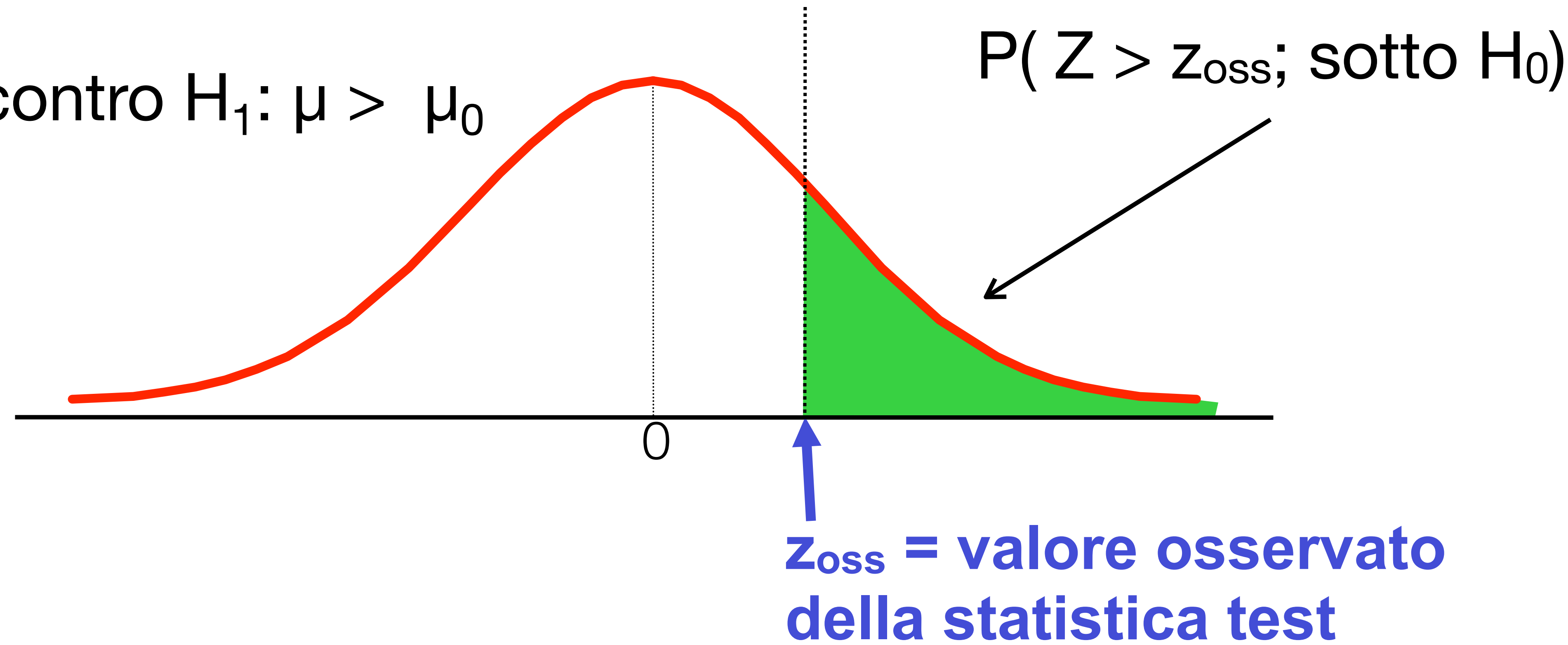
la probabilità che di ottenere nel campionamento ripetuto un valore della statistica test uguale o più estremo ($\leq$ o $\geq$) del valore fornito dal campione, assumendo che H_0 sia vera

Questa probabilità è detta **livello di significatività osservato** o **p-value**

È una misura dell'**evidenza contraria** all'ipotesi nulla

Verifica di ipotesi e p-value

H_0: $\mu <= \mu_0$ contro H_1: $\mu > \mu_0$



Questa probabilità è detta **livello di significatività osservato** o **p-value**

È una misura dell'**evidenza contraria** all'ipotesi nulla

Verifica di ipotesi e p-value

P(osservare un valore di z uguale o più estremo di quello osservato) = **p-value**

È una misura dell'**evidenza contraria** all'ipotesi nulla

p-value	Test	Evidenza contraria
≤ 0.01	Altamente significativo	Forte
$0.01 < p \leq 0.05$	Significativo	Sufficiente
$0.05 < p$	Non significativo	Insufficiente

Esempio: Test Z unilaterale (a destra) sulla Media (σ nota)

Un manager di una compagnia telefonica ritiene che la bolletta mensile per il cellulare dei loro clienti sia aumentata, e che in media sia ora al di sopra di 52 euro al mese. La compagnia desidera verificare questa ipotesi. Supponiamo che $\sigma = 10$ sia nota

H_0: $\mu \leq 52$ la media mensile non è maggiore di 52 Euro

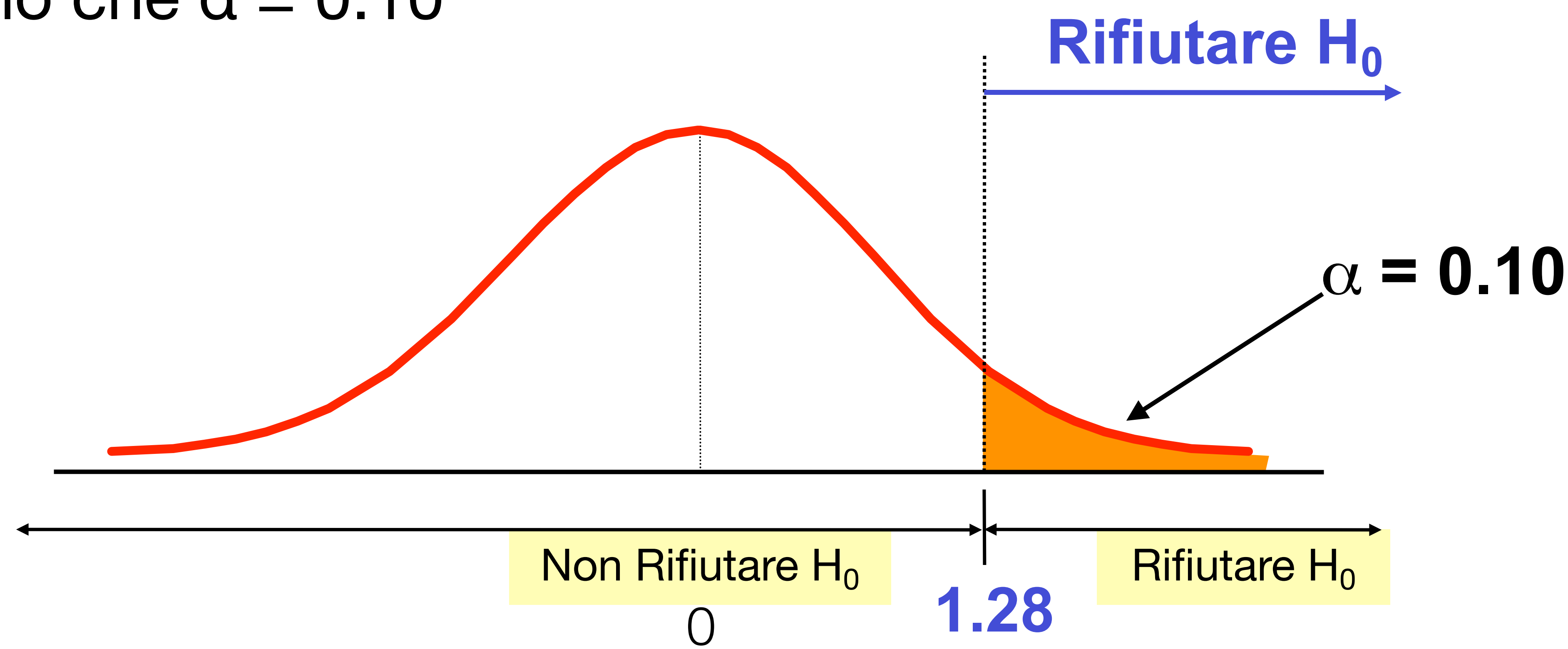
H_1: $\mu > 52$ la media mensile è maggiore di 52 Euro

Nota: l'ipotesi nulla si può scrivere come

H_0: $\mu = 52$ oppure H_0: $\mu \leq 52$

Regione di Rifiuto al livello 0.1

Assumiamo che α = 0.10



Rifiutare H_0 se

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > 1.28$$

Esempio: Risultati Campionari

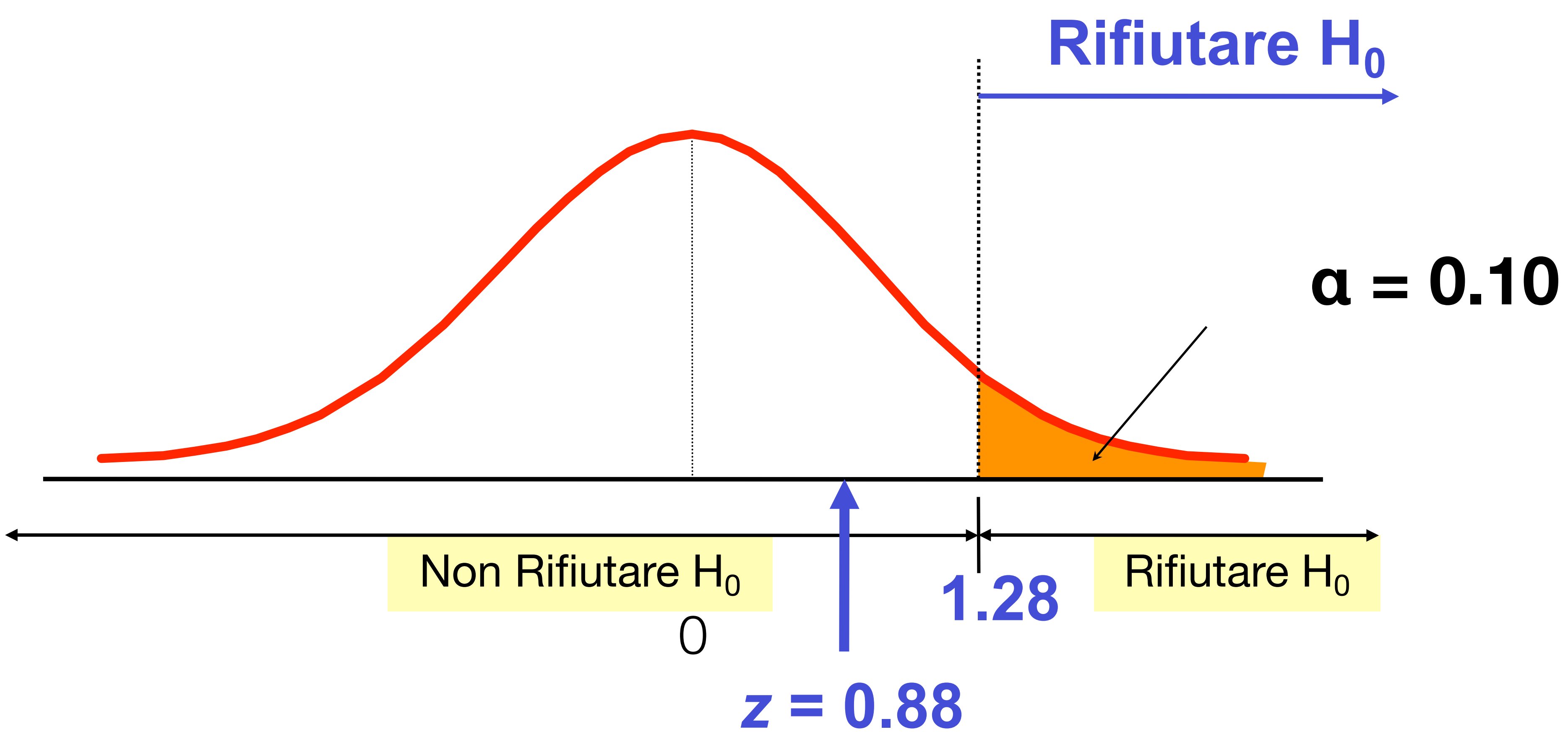
Supponiamo che venga estratto un campione con n = 64,
e media campionaria **53.1** (**σ =10** è nota)

Il valore osservato della statistica test è

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{53.1 - 52}{10/\sqrt{64}} = 0.88 < 1.28$$

Esempio: Decisione

Prendere una decisione ed interpretare i risultati

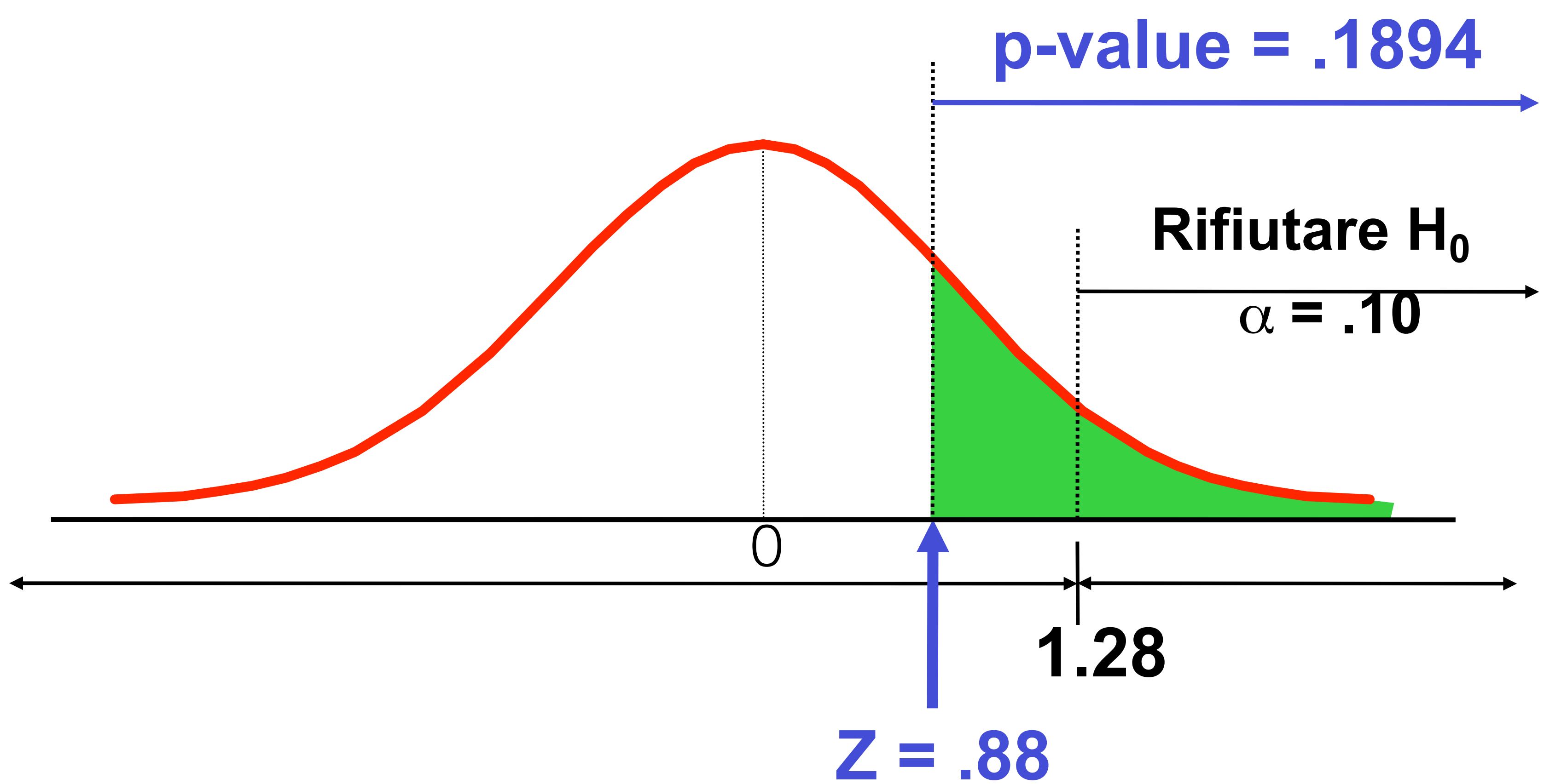


Non rifiutare H_0 poiché $z = 0.88 < 1.28$

non ci sono sufficienti evidenze che la bolletta media sia superiore a 52 Euro

Calcolo il p-Value

Calcolare il p-value (Sotto ipotesi nulla μ = 52)



$$p = P(Z > 0.88) = 1 - 0.8106$$
$$= 0.1894$$

non significativo

P-value con test bilaterali

Verificare l'ipotesi che il vero # medio di TV nelle case americane sia uguale a 3

(Assumiamo $\sigma = 0.8$)

1) Fornire le appropriate ipotesi nulla ed alternativa
H_0: $\mu = 3$, H_1: $\mu \neq 3$ (Questo è un test **bilaterale**)

2) Supponiamo che sia estratto un campione casuale di dimensione $n = 100$

Soluzione

σ è nota quindi questo è un test Z

Per α = .05 i valori critici z sono ±1.96

Raccogli i dati e calcola la statistica test

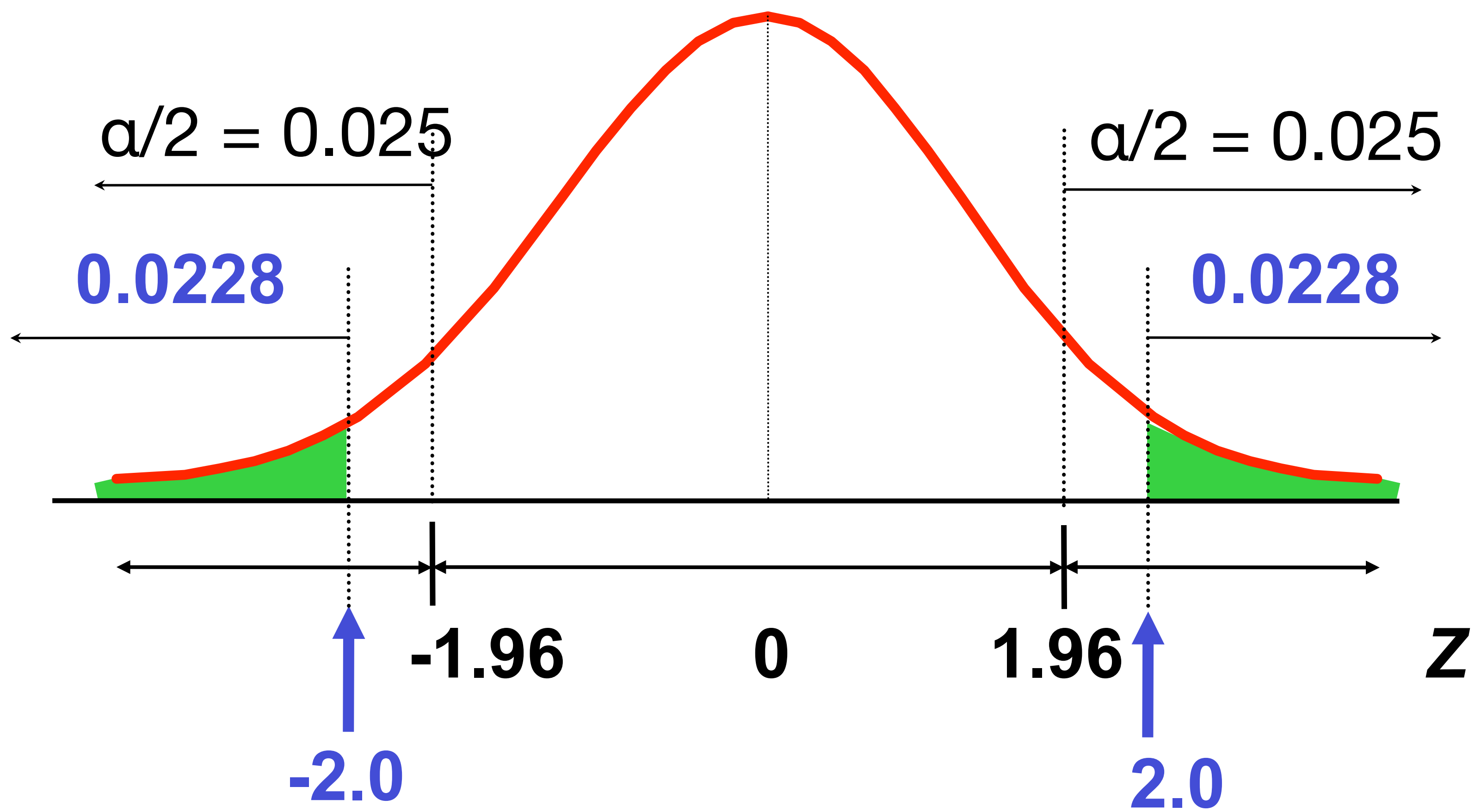
Supponiamo che la media campionaria sia **2.84**. Quindi la statistica test è:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{2.84 - 3}{0.8 / \sqrt{100}} = -2.0$$

Calcolo del p-Value

Qual'è la probabilità di osservare un valore della statistica test di -2.0 (o un valore più lontano dalla media, **in entrambe le direzioni**) se la vera media è $\mu = 3.0$?

Equivale a calcolare $P(Z < -2.0) + P(Z > 2.0) = 0.0456$



Il test è significativo

Esempio: Test Bilaterale (σ non nota)

Il costo medio di una camera di hotel in New York è \$168 per notte?

Un campione casuale di 25 hotel ha media = \$172.50 e s = \$15.40.

Verifica l'ipotesi ad un livello $\alpha = 0.05$.

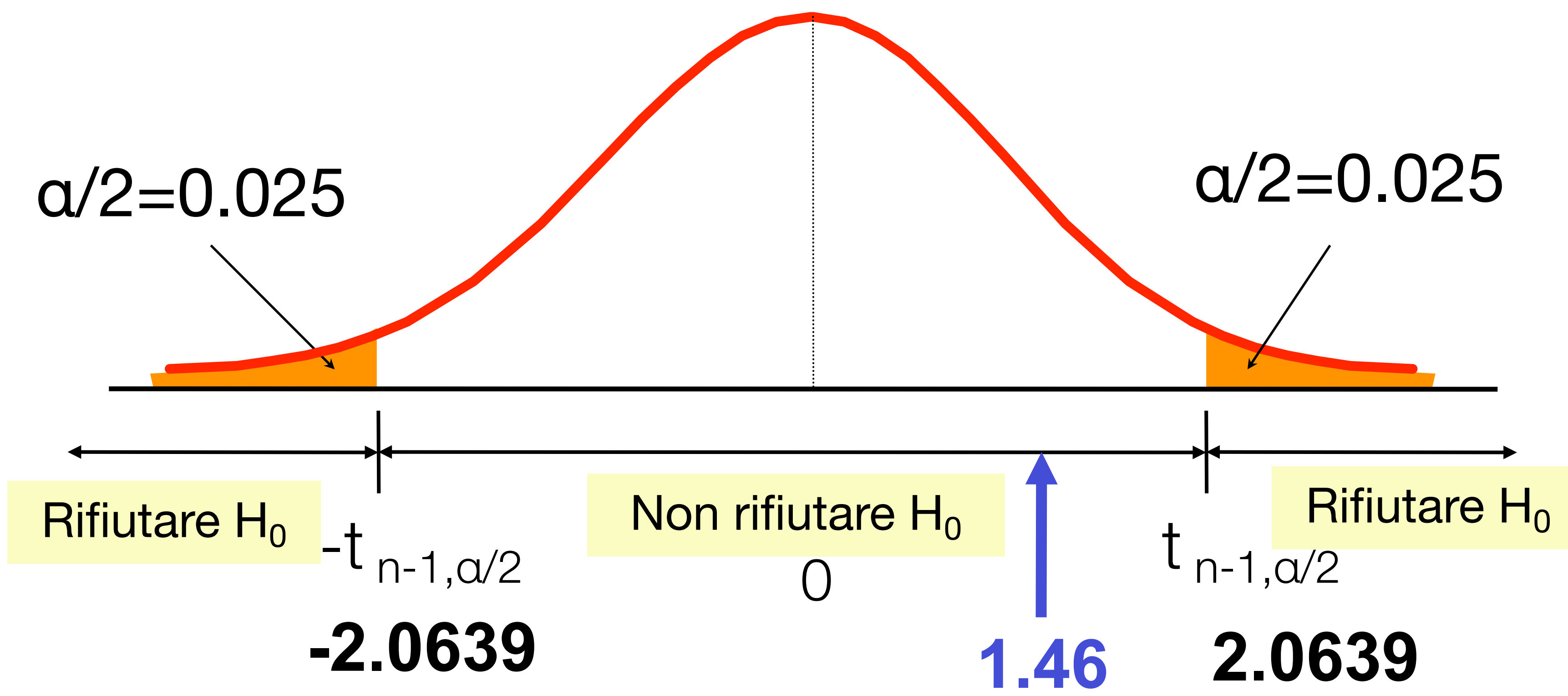
Assumiamo che la popolazione abbia distribuzione normale

$$H_0: \mu = 168$$
$$H_1: \mu \neq 168$$

Soluzione Esempio: Test Bilaterale

H_0: μ = 168
H_1: μ ≠ 168

α = 0.05, n = 25



σ è non nota, quindi usiamo una statistica

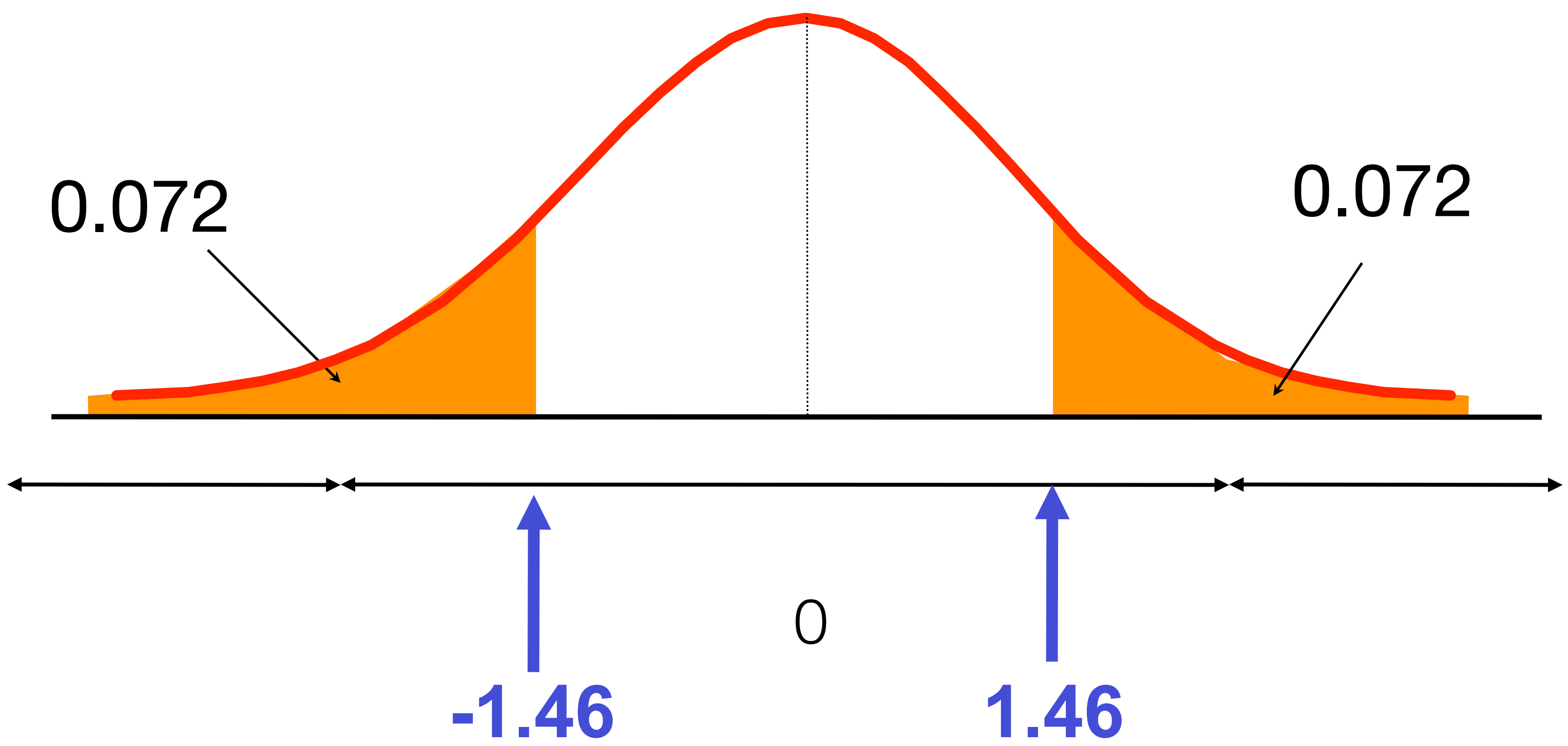
$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{172.5 - 168}{15.4/\sqrt{25}} = 1.46$$

Valore Critico: $t_{24\ ,\ 0.025}$ = **2.0639**. Conclusione:

Non rifiutare H_0: non ci sono sufficienti evidenze che il costo medio differisca da $168

Soluzione Esempio: Test Bilaterale

H_0: $\mu = 168$
H_1: $\mu \neq 168$



σ è non nota, quindi usiamo una statistica

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{172.5 - 168}{15.4/\sqrt{25}} = 1.46$$

p-value = **0.144**. Conclusione:

Test non sgnificativo: non ci sono sufficienti evidenze che il costo medio differisca da $168

Esempio di determinazione del p-value

Un professore asserisce che il punteggio medio al suo esame è **22**. Supponiamo di sapere che il punteggio **si distribuisce normalmente**.

Si considera un campione casuale di 9 studenti che hanno fatto l'esame

$$\{24, 23, 22, 24, 27, 27, 19, 25, 24\}$$

$$\bar{X} = 23.89, \quad s = 2.47$$

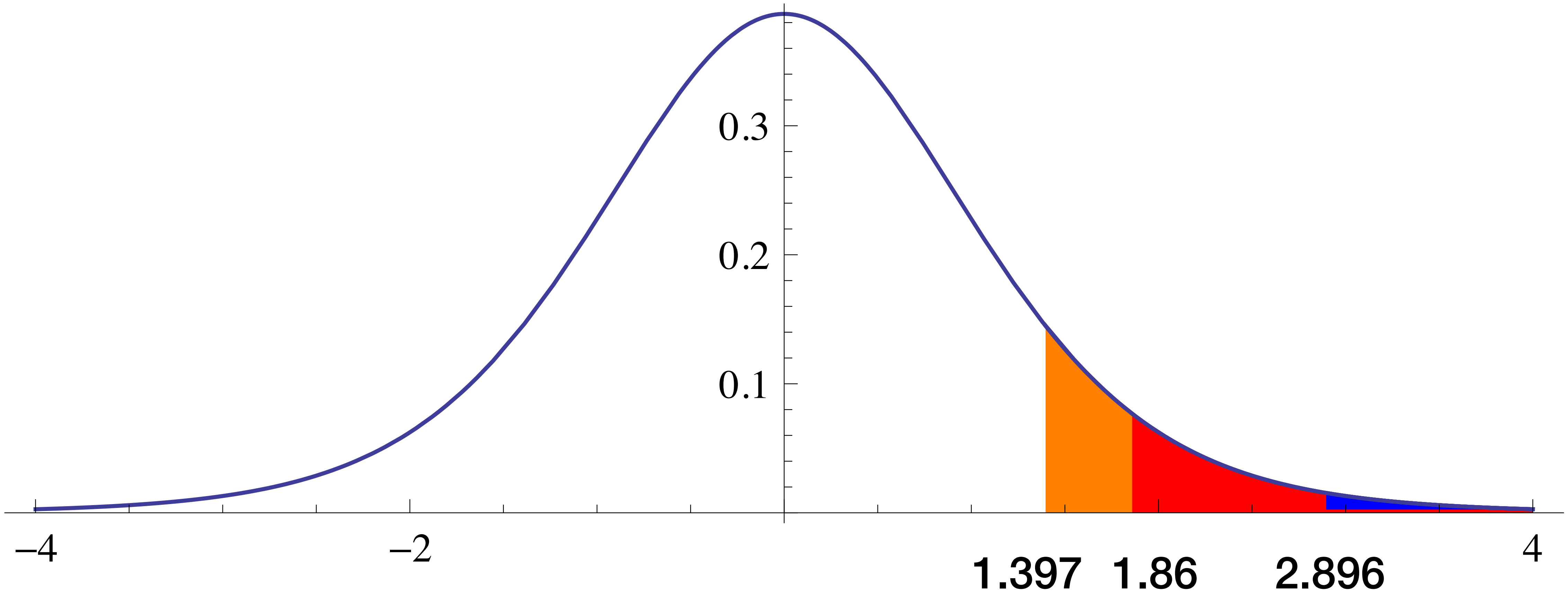
Qual è il p-value del test: $H_0 : \mu \leq 22, \quad H_1 : \mu > 22$?

Esempio di determinazione del p-value

Sotto l'ipotesi nulla la distribuzione del test t di Student è

$$t = \frac{\bar{X} - 22}{S/\sqrt{n}} \sim t_8$$

Regioni critiche al 10%, 5% 1%

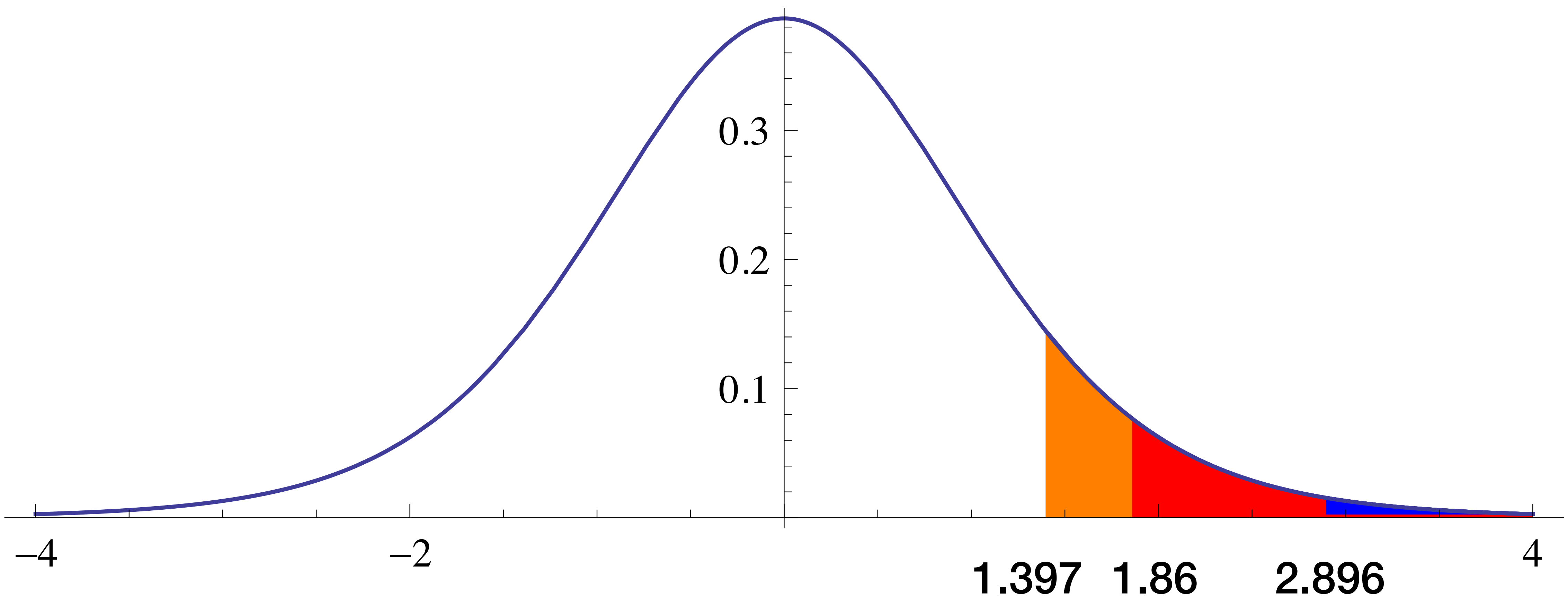


Esempio di determinazione del p-value

Valore osservato della statistica test

$$t = \frac{23.89 - 22}{2.47/3} = 2.29$$

Regioni critiche al 10%, 5% 1%



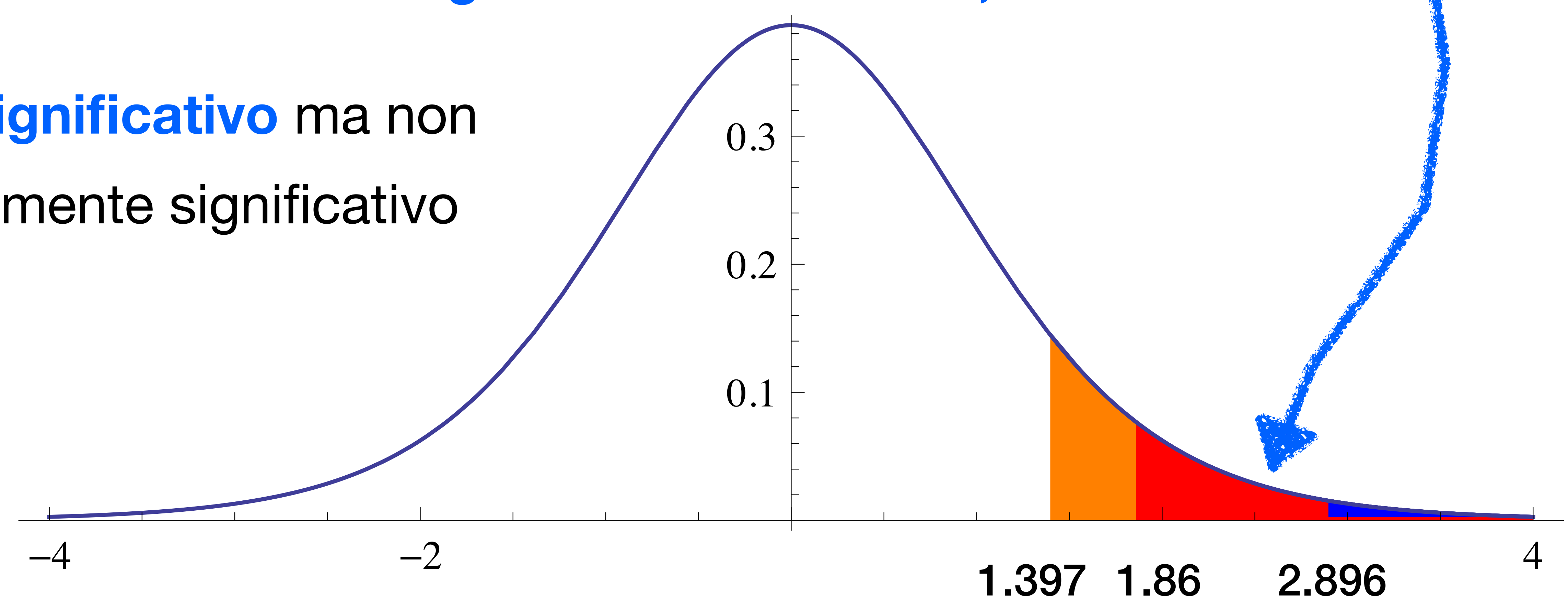
Esempio di determinazione del p-value

Valore osservato della statistica test

$$t = \frac{23.89 - 22}{2.47/3} = 2.29$$

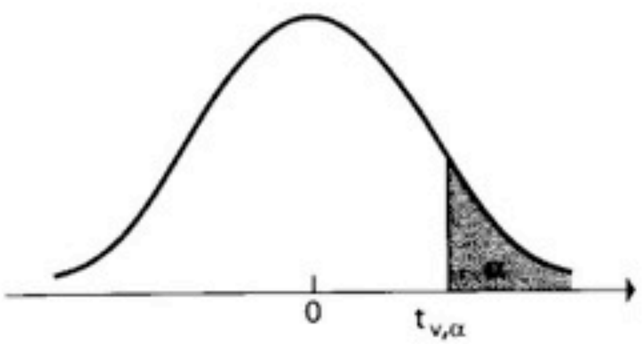
Regioni critiche al 10%, 5% 1%

È significativo ma non altamente significativo



Dove si cercano i valori critici?

Tavola 2 Distribuzione *t* di Student.



In corrispondenza alla variabile aleatoria t di Student con v gradi di libertà la tavola contiene, per determinati valori di α, i valori di $t_{v,\alpha}$ tali che $P(t_v > t_{v,\alpha}) = \alpha$ (ovvero il quantile di ordine $1 - \alpha$). Ad esempio, la probabilità che la variabile aleatoria t di Student con 10 gradi di libertà superi 1.372 è pari a 0.10.

ν	α				
	0.100	**0.050**	**0.025**	**0.010**	**0.005**
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977

Esempio (2) di determinazione del p-value

Un professore asserisce che il punteggio medio ad un esame è **83**. **Si suppone** che la variabile punteggio conseguito **si distribuisca normalmente**.

In un campione di 8 studenti si ottengono i punteggi:

{82, 77, 85, 76, 81, 91, 70, 82}

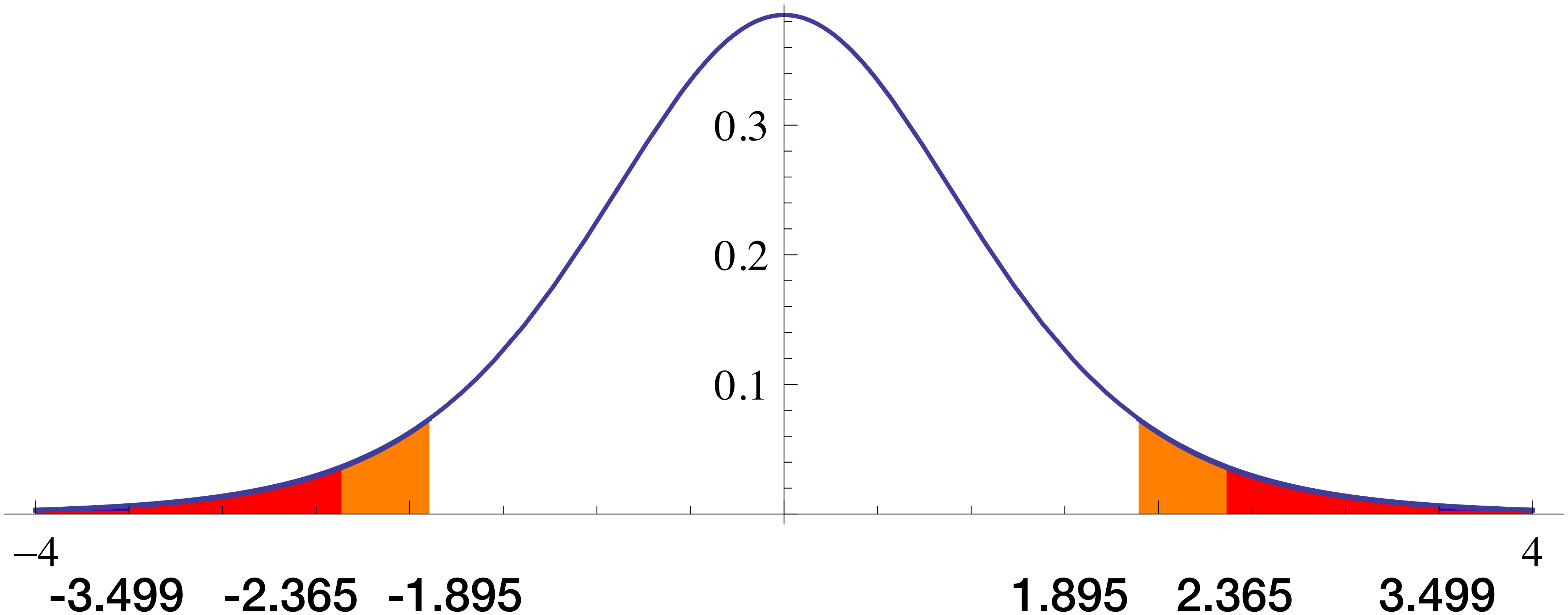
Qual è il p-value del test: $H_0 : \mu = 83 \quad H_1 : \mu \neq 83$?

Esempio (2) di determinazione del p-value

Sotto l'ipotesi nulla la distribuzione del test t di Student è

$$\frac{\bar{X} - 83}{S/\sqrt{n}} \sim t_7$$

Regioni critiche al 10%, 5% 1%

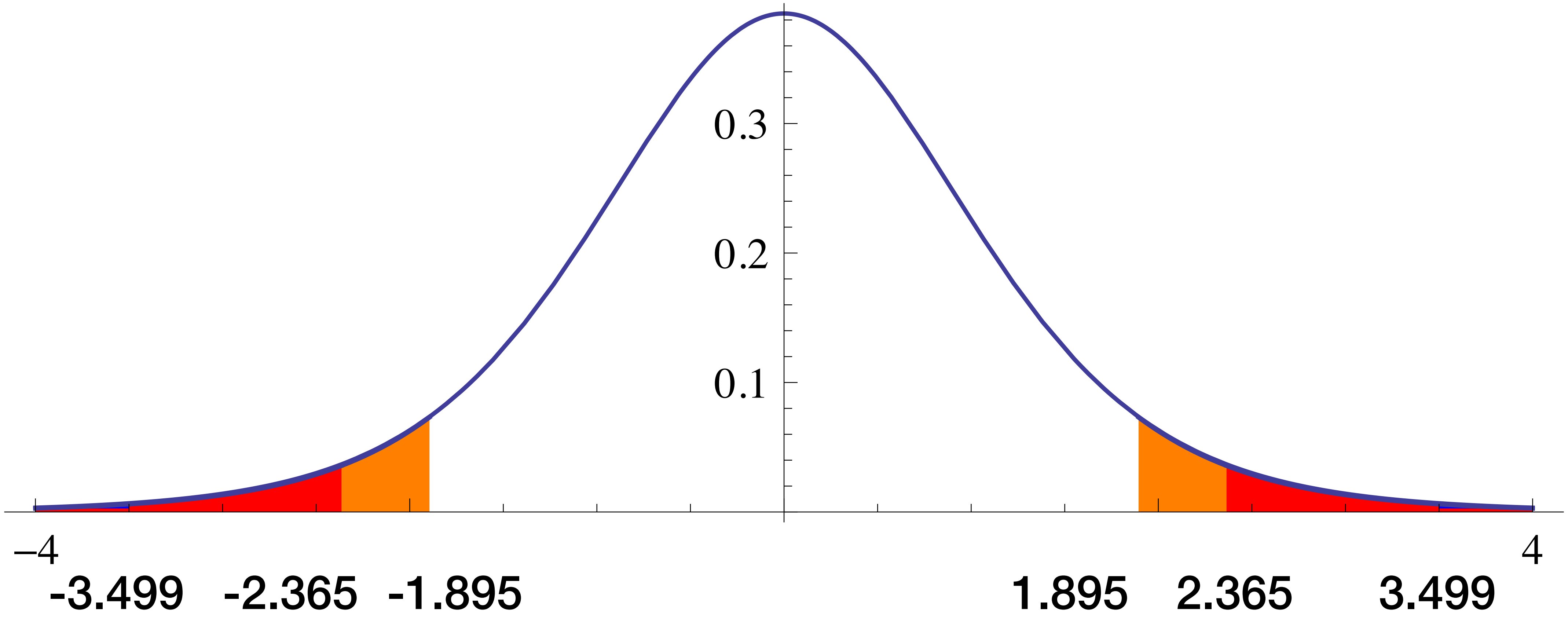


Esempio (2) di determinazione del p-value

Valore osservato della statistica test t di Student

$$\bar{X} = 80.5 \quad s = 6.30 \quad n = 8 \qquad t = \frac{80.5 - 83}{6.3/\sqrt{8}} = -1.122$$

Regioni critiche al 10%, 5% 1%



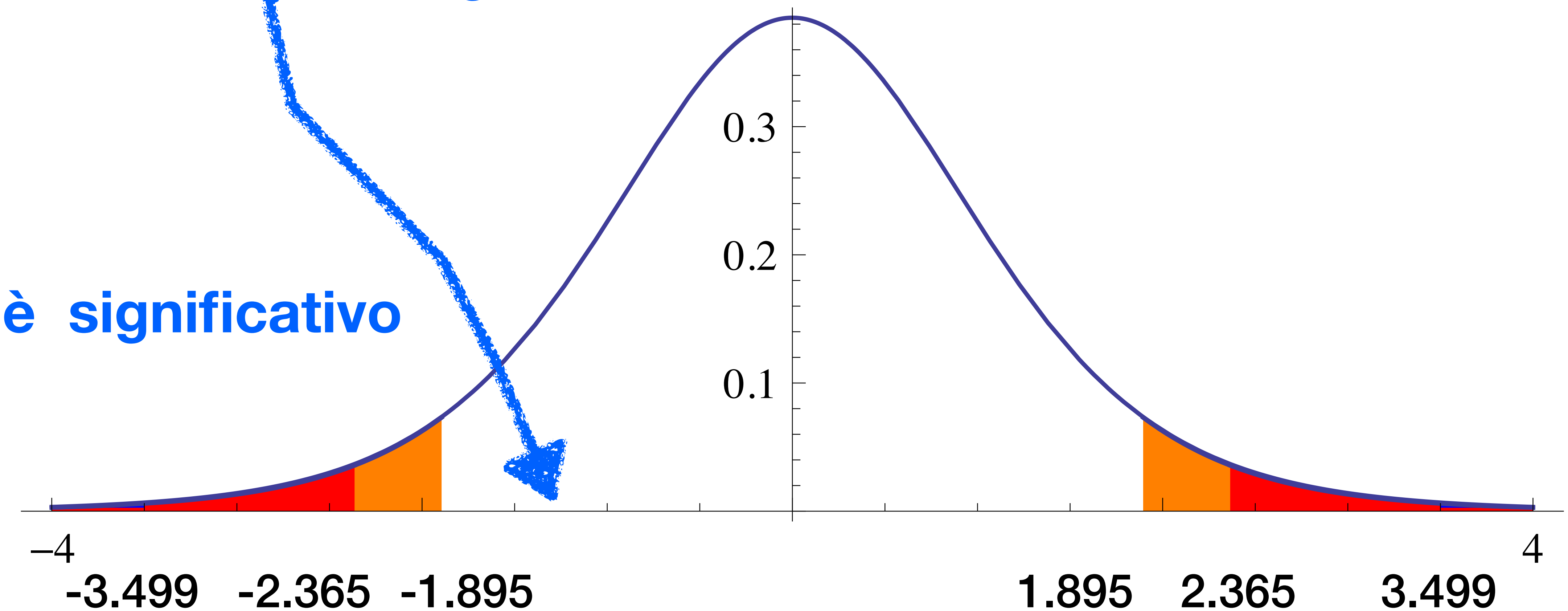
Esempio (2) di determinazione del p-value

Valore osservato della statistica test t di Student

$$\bar{X} = 80.5 \quad s = 6.30 \quad n = 8 \qquad t = \frac{80.5 - 83}{6.3/\sqrt{8}} = -1.122$$

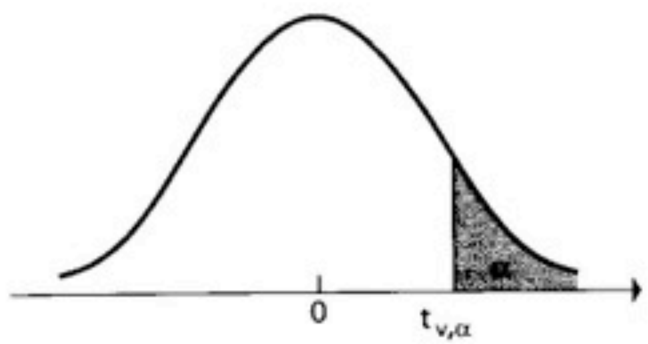
Regioni critiche al 10%, 5% 1%

Non è significativo



Dove si cercano i valori critici?

Tavola 2 Distribuzione *t* di Student.



Occorre cercare in corrispondenza della metà di 1%, 5%, 10%

In corrispondenza alla variabile aleatoria t di Student con v gradi di libertà la tavola contiene, per determinati valori di α, i valori di $t_{v,\alpha}$ tali che $P(t_v > t_{v,\alpha}) = \alpha$ (ovvero il quantile di ordine $1 - \alpha$). Ad esempio, la probabilità che la variabile aleatoria t di Student con 10 gradi di libertà superi 1.372 è pari a 0.10.

ν	α				
	0.100	**0.050**	**0.025**	**0.010**	**0.005**
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977

Test sulla Proporzione della Popolazione

Riguarda una popolazione dicotomica

$X \sim \text{Bernoulli}(p)$

dove p è la proporzione della popolazione nella categoria dei "successi"

Ipotizziamo che il campione sia grande

Proporzioni (ripasso)

La proporzione campionaria di successi viene indicata con

$$\boxed{\hat{P} = \frac{X}{n} = \frac{\text{numero di successi nel campione}}{\text{dimensione del campione}}}$$

Quando $np(1 - p) > 9$, la distribuzione di $\hat{P}$ sotto ipotesi nulla $p = p_0$ può essere approssimata con una distribuzione normale

$$N(p, \sqrt{p_0(1 - p_0)/n})$$

Verifica di Ipotesi su Proporzioni

Se $n\hat{p}(1-\hat{p}) > 9$

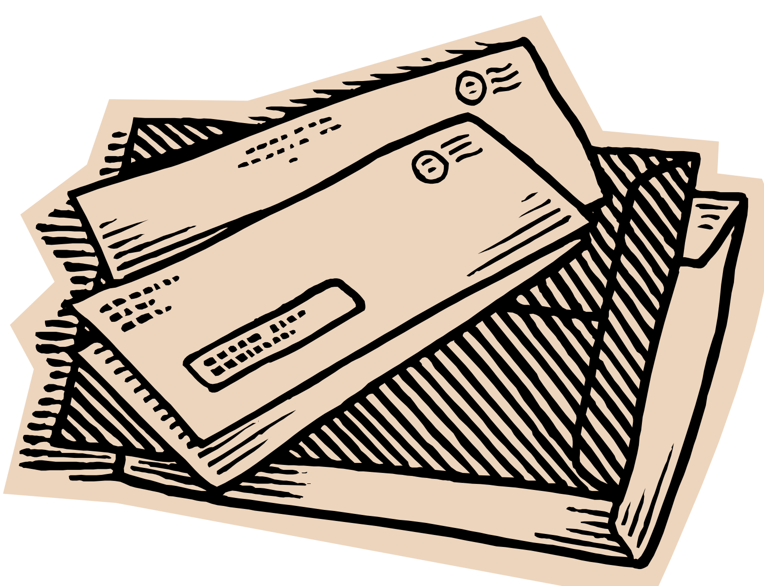
La distribuzione campionaria di $\hat{P}$ è approssimativamente normale, quindi usiamo una statistica test Z:

$$\boxed{Z = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}}$$

Esempio: Test Z su Proporzioni

Una società di marketing afferma che il suo tasso di risposta agli invii postali è 8%. Per verificare questa ipotesi, si considera un campione casuale di 500 clienti e si ottengono 25 risposte.

Verificare l'ipotesi ad un livello $\alpha = 0.05$.



La stima di p è = 25/500 = 0.05
quindi l'approssimazione normale
è buona:
$(500)(.05)(.95) = 23.75 > 9$

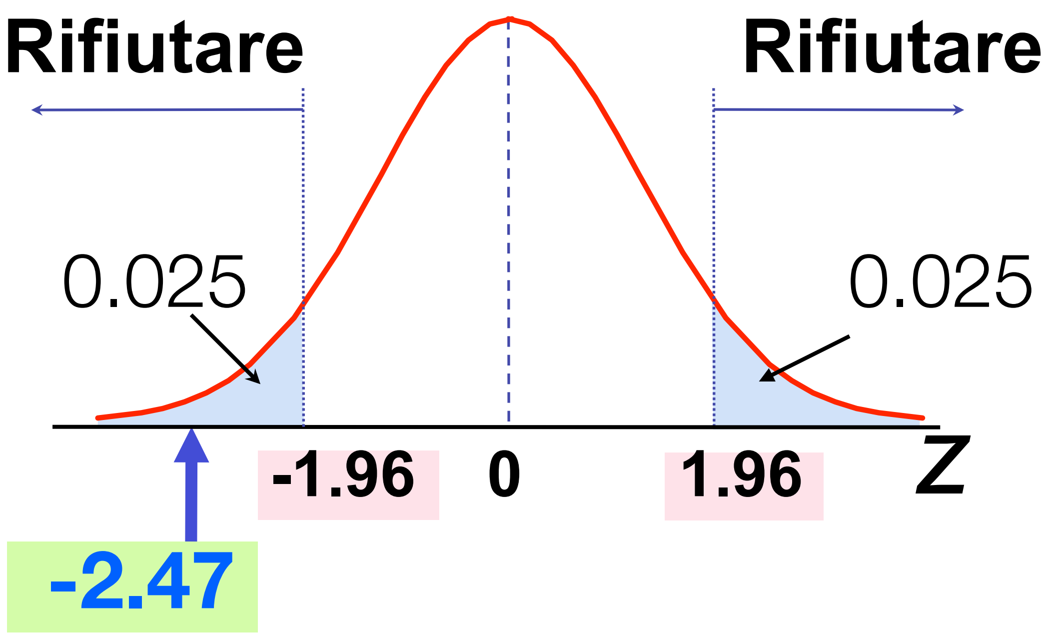
Test Z sulla Proporzione: Soluzione

H_0: p = 0.08 H_1: p ≠ 0.08

α = 0.05 n = 500,

Statistica Test

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{.05 - .08}{\sqrt{\frac{.08(1-.08)}{500}}} = -2.47$$



Valori Critici: ± 1.96

Decisione

Rifiutare H_0 ad α = 0.05

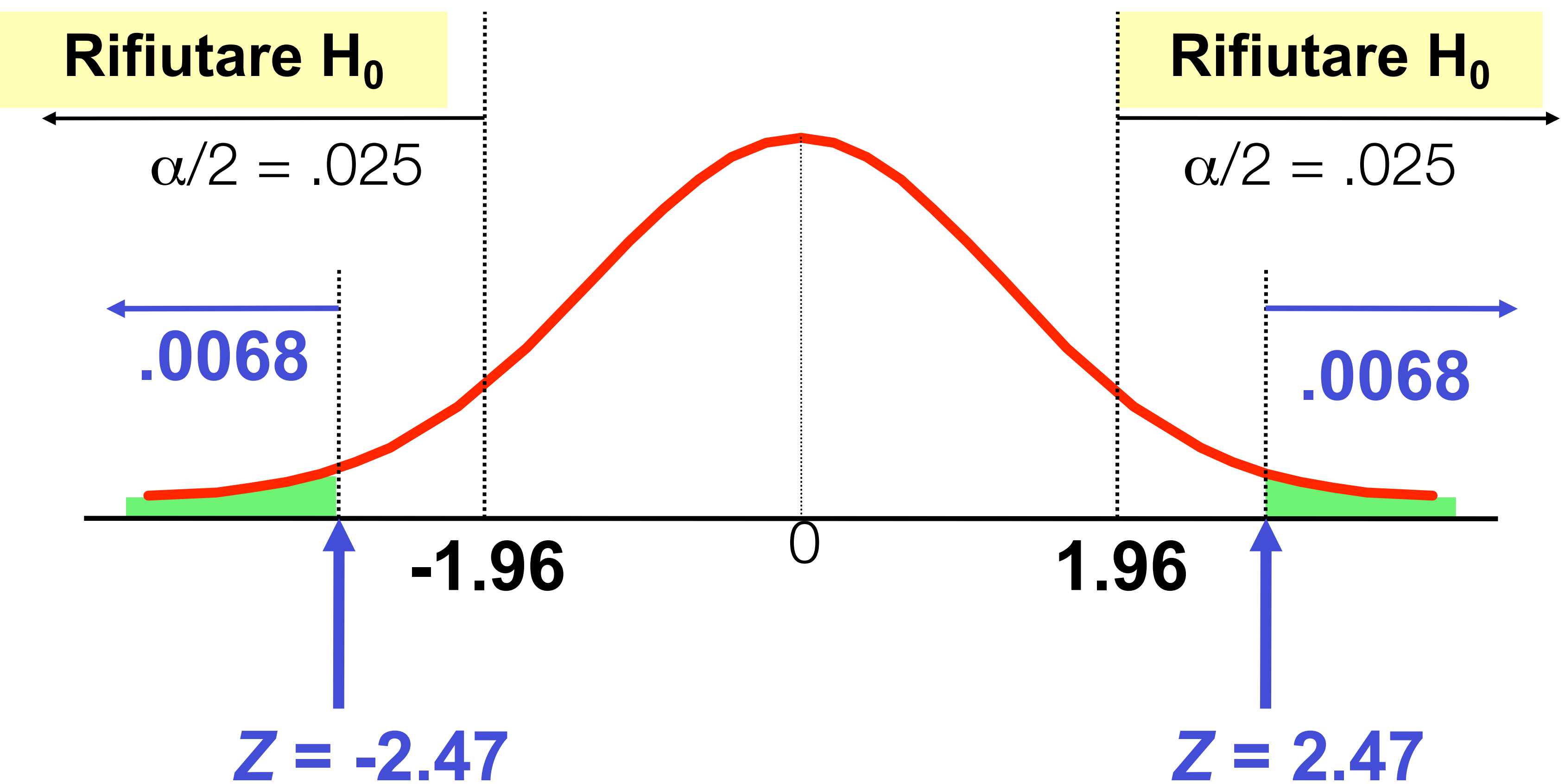
Conclusione

Sufficiente evidenza contraria all'ipotesi che il tasso di risposta sia 8%.

Soluzione p-Value

Calcolare il p-value e confrontare con α

(Per un test bilaterale il p-value è sempre a due code)



p-value = .0136:

$$P(Z \leq -2.47) + P(Z \geq 2.47)$$
$$= 2(.0068) = 0.0136$$

Rifiutare H_0 poiché il p-value = .0136 < α = .05

Errore del II tipo e potenza del test

Potenza del Test

Ricordare i possibili risultati della verifica di ipotesi

	Stato di Natura	
Decisione	H_0 Vera	H_0 Falsa
Non Rifiutare H_0	No errore $(1 - \alpha)$	Errore di Secondo Tipo (β)
Rifiutare H_0	Errore di Primo Tipo (α)	No Errore $(1 - \beta)$

- β rappresenta la probabilità dell'errore di secondo tipo
- $1 - \beta$ è definito come la potenza del test

Potenza $= 1 - \beta =$ probabilità di rifiutare correttamente l'ipotesi nulla quando è falsa

Errore di Secondo Tipo

Supponiamo che la popolazione abbia distribuzione normale e la varianza della popolazione sia nota. Consideriamo il test

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 \quad H_1 : \mu < \mu_0$$

La **regola di decisione** è rifiutare l'ipotesi nulla se: $\bar{x} < x_c$

Supponiamo che **l'ipotesi nulla sia falsa** e che la vera media sia μ*, allora la probabilità di **accettare** H_0 cioè la P(II) è

$$\begin{aligned}\beta &= P(\bar{X} > x_c; H_0 \text{ falsa e} \mu = \mu_*) \\ &= P[\bar{X} > x_c; \bar{X} \sim N(\mu_*, \sigma/\sqrt{n})] \\ &= P\left(Z > \frac{x_c - \mu_*}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

Esempio da un compito

Un produttore di sacchi di cemento afferma di riempire i propri sacchi con **almeno 50.2** kg di cemento. Si assuma che la deviazione standard per la quantità di cemento in ogni sacco sia **1.2** kg.

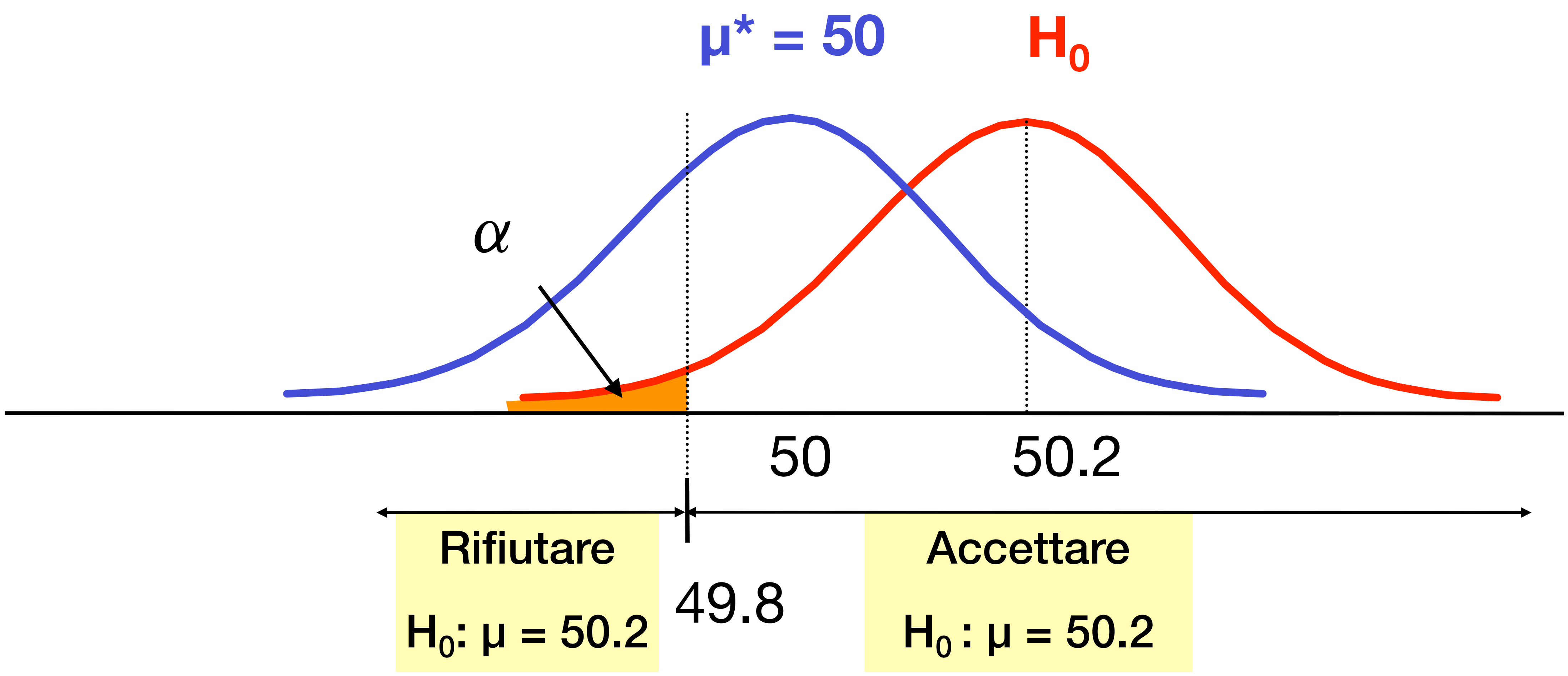
Si decide di bloccare la macchina riempitrice qualora la media campionaria della quantità di cemento in un campione di **40** sacchi sia inferiore a **49.8** kg.

Supponiamo che **la vera quantità media** di cemento sia di **50** kg. Usando la regola di decisione sopra proposta, quale è la probabilità di commettere un errore del II tipo?

Esempio: Errore di Secondo Tipo

$$H_0 : \mu = 50.2 \quad \mu < 50.2$$

Supponiamo che **H_0: μ = 50.2** venga accettata mentre in realtà la vera media è **μ* = 50**

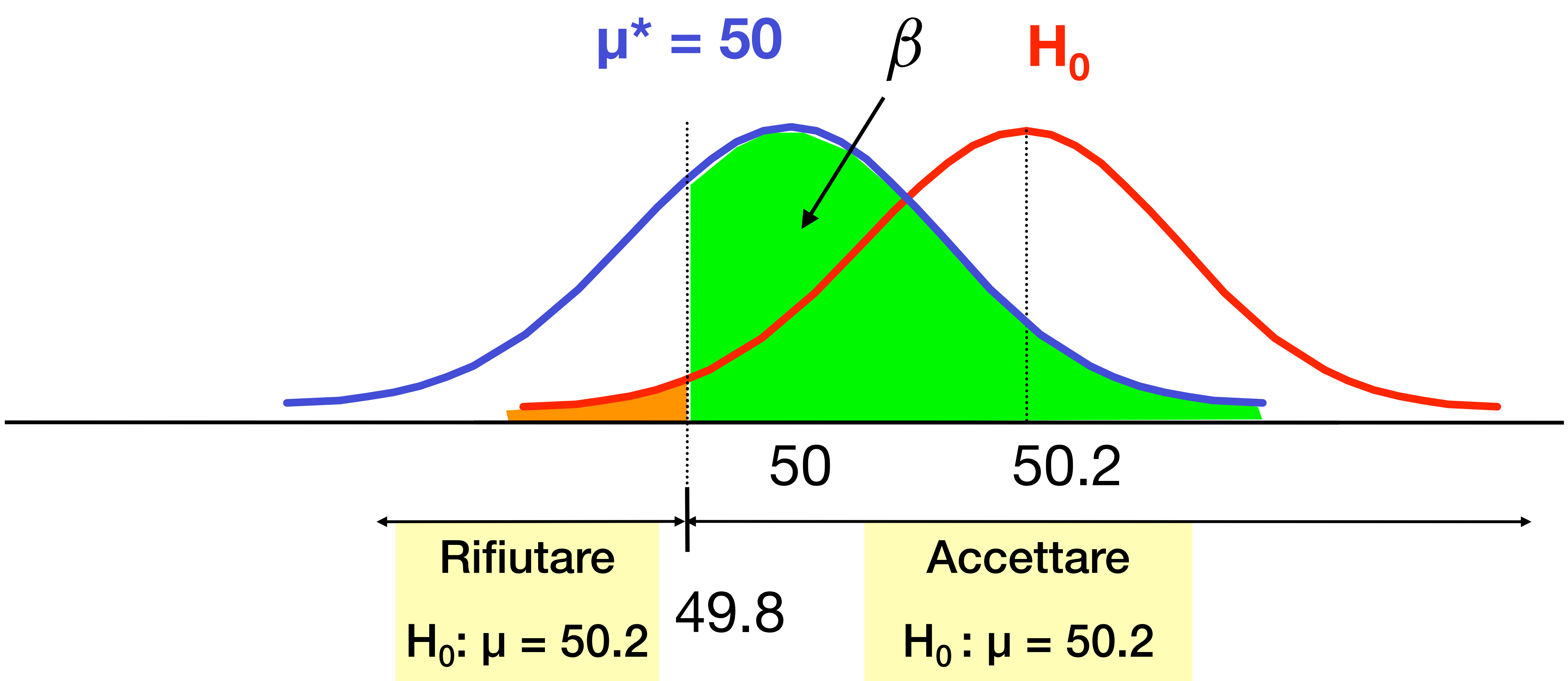


Esempio: Errore di Secondo Tipo

$$H_0 : \mu = 50.2 \quad \mu < 50.2$$

La probabilità di errore di secondo tipo è

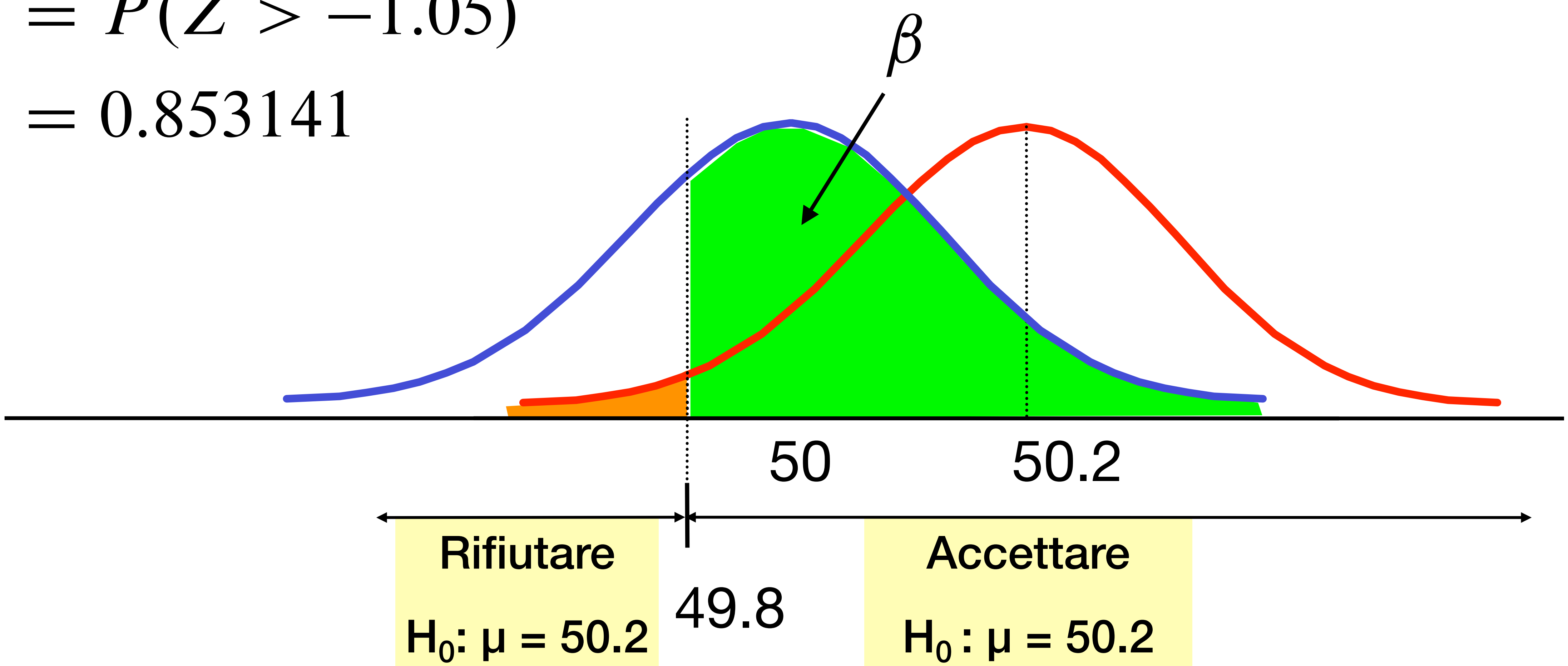
$\beta = P(\, X \geq 49.8)$ quando $\mu^* = 50$



Calcolo di β

Poiché n = 40 , σ = 1.2 kg

$$\beta = P(\bar{X} > 49.8;\ \text{sotto}\ \mu = \mu* = 50)$$
$$= P\left(Z > \frac{49.8 - 50}{1.2/\sqrt{40}}\right)$$
$$= P(Z > -1.05)$$
$$= 0.853141$$



Riepilogo del corso

- Distribuzioni di frequenze
- Variabilità e Regola empirica
- Correlazione
- Probabilità condizionata
- Indipendenza
- Binomiale e Normale
- Campioni casuali
- Distribuzioni campionarie
- Campionamento ripetuto
- Interpretazione del livello di confidenza e del livello del test