

## Calcolo dell'accelerazione gravitazionale con il pendolo a filo

### Scopo dell'esperienza

Calcolo dell'accelerazione di gravità tramite la misura della lunghezza e del periodo di oscillazione del pendolo.

### Strumenti di misura ed attrezzature

- Cronometro: sensibilità 0,01 s
- Metro: sensibilità 0,1 cm; portata 300 cm
- Bilancia elettronica: sensibilità 0,1 g; portata 500 g
- Calibro: sensibilità 1 mm; portata 152 mm
- Sostegno metallico
- Filo di nylon non elastico
- Corpo sferico in piombo: massa 109,7 g; diametro 2,7 cm



### Premesse teoriche

Il periodo di oscillazione di un pendolo a filo è dato dalla formula:  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

dove:

**T** è il periodo di una sola oscillazione completa (moto di andata e ritorno alla posizione iniziale del pendolo) in secondi;

**l** è la lunghezza in metri dal punto di sospensione al centro di massa della sfera;

**g** è l'accelerazione di gravità in metri al secondo quadrato (incognita dell'esperimento).

## Descrizione delle operazioni e delle misure condotte

- Leghiamo un capo del filo al sostegno metallico e l'altro al corpo in piombo.
- Misuriamo accuratamente la lunghezza del filo col metro e quella del diametro della sfera col calibro; sommiamo poi le due misure e vi sottraiamo il raggio del corpo. Al fine di ottenere una misura più precisa, ripetiamo questo passaggio tre volte e ne calcoliamo l'errore assoluto  $\Delta l = \frac{l_{max} - l_{min}}{2}$ .
- Spostiamo il peso di un certo angolo  $\alpha$  (con  $\alpha < 10^\circ$ ) rispetto alla posizione di equilibrio. Il periodo non dipende dall'angolo solo se esso è inferiore ai  $10^\circ$ : quando le oscillazioni sono piccole, infatti, il seno dell'angolo è uguagliabile alla sua ampiezza.
- Lasciamo oscillare il corpo prestando attenzione alla sua traiettoria che deve restare sullo stesso piano.
- Quando il moto del corpo è regolare ed esso raggiunge un estremo dell'oscillazione, azioniamo il cronometro.
- Contiamo 20 oscillazioni e fermiamo il tempo al termine dell'ultima. Affinché l'errore dell'esperienza sia ridotto, ripetiamo tale operazione 20 volte.
- Calcoliamo la media dei valori del tempo misurati e la dividiamo per il numero di oscillazioni (20) ottenendo così il periodo T del pendolo. Ricaviamo l'errore assoluto della media del tempo con la formula  $\Delta t = \frac{t_{max} - t_{min}}{2}$ .
- Ricaviamo la costante di accelerazione gravitazionale dalla formula del periodo  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$  da cui  $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$ .
- Ripetiamo l'intera esperienza altre sei volte, cambiando la lunghezza del filo per ognuna di esse.
- Ottenuti 7 valori di g ne calcoliamo l'errore assoluto  $\Delta g = \frac{g_{max} - g_{min}}{2}$ .

## Dati di misura

Esperienza 1

Misurazione n°	t (s)	T
1	27,63	1,3815
2	28	1,4
3	27,91	1,3955
4	27,82	1,391
5	27,91	1,3955
6	27,85	1,3925
7	27,91	1,3955
8	27,85	1,3925
9	27,75	1,3875
10	27,75	1,3875
11	27,82	1,391
12	27,78	1,389
13	27,82	1,391
14	27,82	1,391
15	27,78	1,389
16	27,91	1,3955
17	27,94	1,397
18	27,85	1,3925
19	27,94	1,397
20	27,68	1,384

L <sub>1</sub> (cm)
48,0
48,4
48,2

media L<sub>1</sub> (cm): 48,2

$\Delta L_1$ : 0,2

min	27,63	
max	28	
Media	27,836	1,3918
$\Delta t$	0,185	

Esperienza 2

Misurazione n°	t (s)	T
1	38,56	1,928
2	38,66	1,933
3	38,44	1,922
4	38,56	1,928
5	38,41	1,9205
6	38,66	1,933
7	38,44	1,922
8	38,41	1,9205
9	38,32	1,916
10	38,32	1,916
11	38,47	1,9235
12	38,59	1,9295
13	38,63	1,9315
14	38,41	1,9205
15	38,5	1,925
16	38,47	1,9235
17	38,85	1,9425
18	38,44	1,922
19	38,35	1,9175
20	38,75	1,9375

L <sub>2</sub> (cm):
92,1
92
92,2

media L<sub>2</sub>: 92,1  
 $\Delta_{L_2}$ : 0,05

min 38,32  
 max 38,85  
 media 38,512 1,9256  
 $\Delta t$  0,265

Esperienza 3

Misurazione n°	t (s)	T
1	41,97	2,0985
2	41,85	2,0925
3	41,78	2,089
4	41,78	2,089
5	41,68	2,084
6	41,72	2,086
7	41,85	2,0925
8	41,94	2,097
9	41,87	2,0935
10	42,06	2,103
11	41,78	2,089
12	41,78	2,089
13	42,00	2,1
14	42,16	2,108
15	41,78	2,089
16	41,85	2,0925
17	41,97	2,0985
18	42,00	2,1
19	42,00	2,1
20	41,68	2,084

min                    41,68  
 max                    42,16  
 media                 41,875         2,09375  
 $\Delta t$                  0,24

$L_3$ (cm)
109,3
109,3
109,2

media  $L_3$  (cm):         109,2667  
 $\Delta L_3$ :                         0,05

Esperienza 4

Misurazione n°	t (s)	T
1	45,22	2,261
2	45,22	2,261
3	44,78	2,239
4	44,91	2,2455
5	44,78	2,239
6	44,72	2,236
7	44,78	2,239
8	44,99	2,2495
9	44,82	2,241
10	44,87	2,2435
11	44,66	2,233
12	45,00	2,25
13	44,5	2,225
14	45,09	2,2545
15	44,63	2,2315
16	44,66	2,233
17	44,68	2,234
18	45,09	2,2545
19	45,13	2,2565
20	44,66	2,233

L <sub>4</sub> (cm)
125,4
125,2
125,6

media L<sub>4</sub> (cm): 125,4  
 $\Delta L_4$ : 0,2

min 44,5  
max 45,22  
media 44,8595 2,242975  
 $\Delta t$  0,360

Esperienza 5

Misurazione n°	t (s)	T
1	46,28	2,314
2	46,09	2,3045
3	46,28	2,314
4	46,25	2,3125
5	46,22	2,311
6	46,37	2,3185
7	46,03	2,3015
8	46,09	2,3045
9	45,94	2,297
10	46,13	2,3065
11	46,50	2,325
12	46,32	2,316
13	46,32	2,316
14	46,18	2,309
15	46,50	2,325
16	46,44	2,322
17	46,44	2,322
18	46,37	2,3185
19	46,25	2,3125
20	46,37	2,3185

min                    45,94  
 max                    46,5  
 media                46,2685    2,313425  
 $\Delta t$                 0,280

$L_5$ (cm)
133,2
133,0
133,1

media  $L_5$  (cm):            133,1  
 $\Delta L_5$ :                            0,1

Esperienza 6

Misurazione n°	t (s)	T	
1	55,72	2,786	
2	56,03	2,8015	
3	55,56	2,778	
4	55,78	2,789	
5	55,68	2,784	
6	55,63	2,7815	
7	56,13	2,8065	
8	55,94	2,797	
9	55,97	2,7985	
10	55,87	2,7935	
11	55,85	2,7925	
12	56,12	2,806	
13	55,75	2,7875	
14	55,78	2,789	
15	55,84	2,792	
16	56,03	2,8015	
17	55,98	2,799	
18	56,03	2,8015	
19	56,16	2,808	
20	56,03	2,8015	

L <sub>6</sub> (cm)
195
194,9
194,8

media L<sub>6</sub> (cm): 194,95  
 $\Delta L_6$ : 0,1

min 55,56  
 max 56,16  
 media 55,894 2,7947  
 $\Delta t$  0,300



Esperienza 7

Misurazione n°	t (s)	T
1	68,25	3,4125
2	68,32	3,416
3	68,32	3,416
4	68,47	3,4235
5	67,91	3,3955
6	68,13	3,4065
7	67,91	3,3955
8	68,33	3,4165
9	68,32	3,416
10	68,35	3,4175
11	68,16	3,408
12	67,78	3,389
13	68,16	3,408
14	68,36	3,418
15	67,97	3,3985
16	68,09	3,4045
17	68,4	3,42
18	68,47	3,4235
19	68,4	3,42
20	68,44	3,422

min                    67,78  
 max                    68,47  
 media                 68,227         3,41135  
 $\Delta t$                  0,345

$L_7$ (cm)
289,6
289,4
289,8

media  $L_7$  (cm):         289,5  
 $\Delta L_7$ :                         0,2

## Elaborazione dati

Riassumiamo i dati ottenuti in tabella:

L (m)	N° oscillazioni	Tempo medio (s)	Periodo T (s)	$g = (4\pi^2 L) / T^2$
0,480	20	27,836	1,3918	9,782443
0,921	20	38,512	1,9256	9,805894
1,093	20	41,875	2,0938	9,842593
1,254	20	44,860	2,2430	9,840082
1,331	20	46,269	2,3134	9,818301
1,950	20	55,894	2,7947	9,856572
2,895	20	68,227	3,4114	9,820713

Una volta ottenuti i 7 valori di g calcoliamo la media ed il suo errore assoluto:

$$\bar{g} = 9,823793338 \cong 9,82 \text{ m/s}^2$$

$$\Delta \bar{g} \text{ medio} = 0,037042663 \cong 0,037 \text{ m/s}^2$$

$$\bar{g} = (9,82 \pm 0,037) \text{ m/s}^2$$

In questa esperienza è possibile procedere utilizzando sia il modello media-varianza che quello di regressione riconducendoci ad una proporzionalità diretta.

### Metodo di regressione senza intercetta (a=0)

Si ricava una relazione lineare fra  $T^2$  ed L

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L$$

e si usa modello di regressione senza intercetta sulle misure ( $T^2_i, L_i$ ) per stimare a, b,  $\sigma$  e relativi s.e.

Il valore di a che assumiamo è 0 in quanto utilizziamo il modello di regressione senza intercetta.

Ricaviamo la stima di b con il rispettivo standard error (il margine di errore nello stimare b):

$$b = 4,016085988 \cong 4,02 \quad \text{s.e.}(b) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,00663739164161587.$$

Calcoliamo la deviazione standard di g, ossia la stima della variabilità della costante di accelerazione gravitazionale ed il suo valore standard:

$$\sigma = 0,025033989 \cong 0,025 \quad \text{s.e.}(g) = \frac{4\pi^2}{b^2} \text{s.e.}(b) = 0,002795 \cong 0,003.$$

Infine calcoliamo l'accelerazione gravitazionale:

$$g = \frac{4\pi^2}{b} = 9,830073 \cong 9,83 \text{ m/s}^2.$$

Riassumendo :  $g = (9,83 \pm 0,003) \text{ m/s}^2$ .

### Metodo di regressione con intercetta

Si ripete analogamente il procedimento con il nuovo valore di a,  $a = 0,002910182 \cong 0,003$ .

Arriviamo così ad una diversa stima di b e del rispettivo errore standard.

$$b = 4,01446356 \cong 4,02 \quad \text{s.e.} = 0,006637392 \cong 0,007.$$

Calcoliamo g e s.e.(g).

$$g = 9,834045573 \cong 9,83 \text{ m/s}^2 \quad \text{s.e.}(g) = \frac{4\pi^2}{b^2} \text{s.e.}(b) = 0,016259311 \cong 0,016$$

$$g = (9,83 \pm 0,016) \text{ m/s}^2.$$

### Modello media-varianza

Utilizziamo le misure effettuate nel modello media-varianza per stimare  $\mu = g$ ,  $\sigma$  e lo se(g).

$$y_i / x_i = b + u_i$$

$$\sigma = 0,025033989$$

$$\text{s.e.}(g) = 0,009461958$$

$$b = \frac{y}{x} \rightarrow b = \frac{T^2}{4\pi^2 L} = 0,10179$$

$$g = \frac{1}{b} = 9,82379 \text{ m/s}^2$$

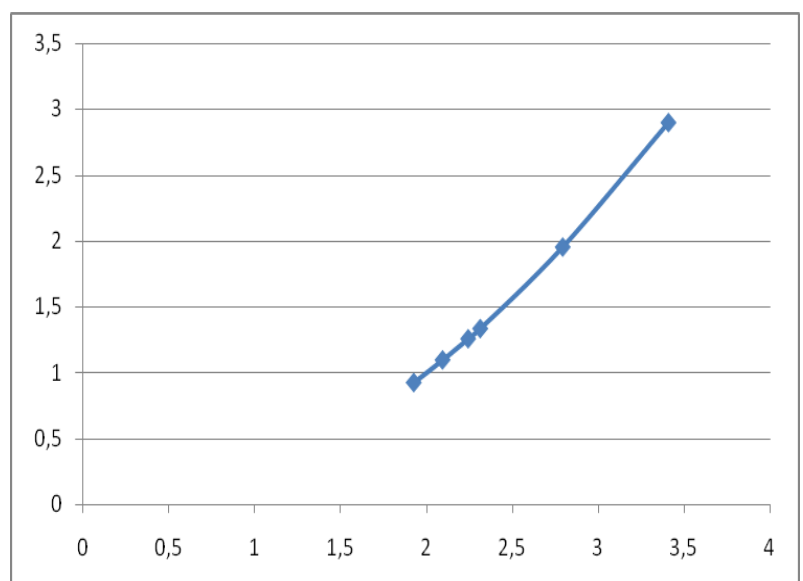
$$g = (9,82 \pm 0,009) \text{ m/s}^2.$$

### Grafici

Atteso quadratico

Grafico L - T

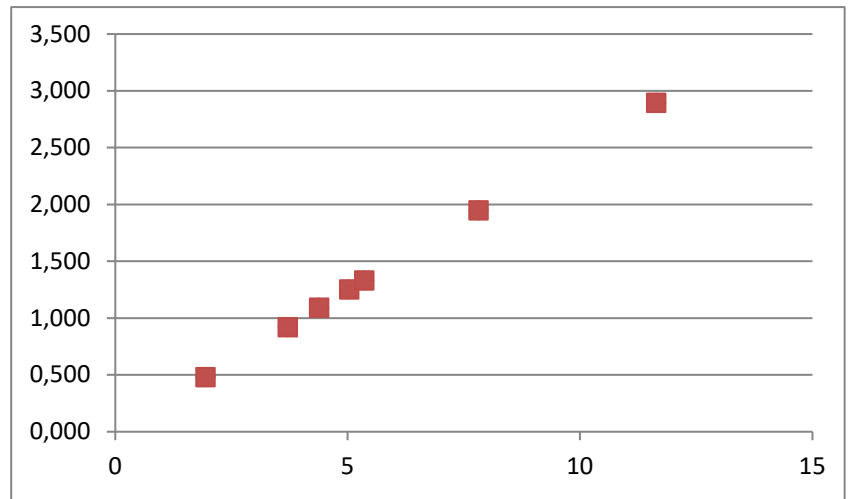
T	L
1,3918	0,480
1,9256	0,921
2,0938	1,093
2,2430	1,254
2,3134	1,331
2,7947	1,950
3,4114	2,895



## Linearizzazione

Grafico L - T<sup>2</sup>

T <sup>2</sup>	L
1,93710724	0,480
3,70793536	0,921
4,38399844	1,093
5,031049	1,254
5,35181956	1,331
7,81034809	1,950
11,63764996	2,895



## Grafico della proporzionalità diretta

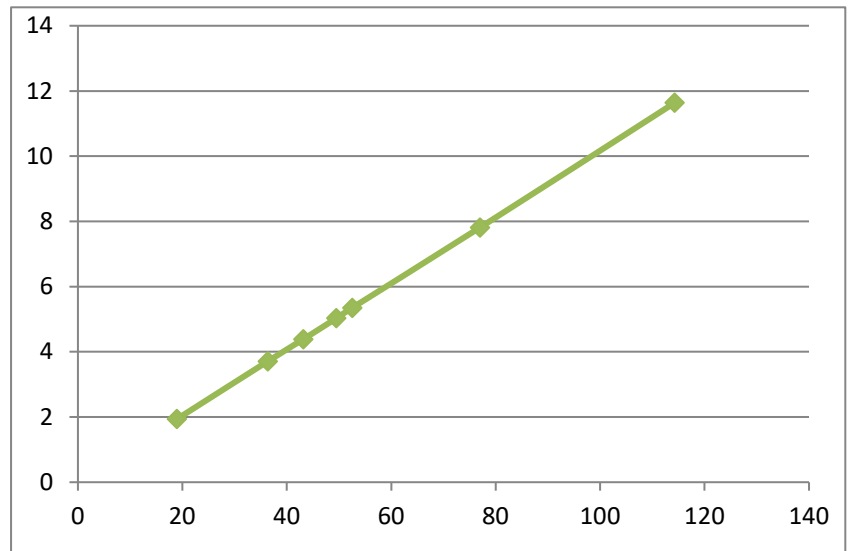
$$y = a + bx$$

$$y = T^2$$

$$x = 4\pi^2 l$$

$$\text{Da cui: } a = 0 \text{ e } b = \frac{1}{g}$$

$$\text{Quindi: } g = \frac{1}{b} \text{ e } \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta b}{b}$$



## Conclusioni

A seguito della nostra esperienza in laboratorio abbiamo ottenuto un valore dell'accelerazione gravitazionale molto vicino a quello reale. Inoltre abbiamo verificato che al variare della lunghezza del filo e quindi del periodo di oscillazione del pendolo, l'accelerazione gravitazionale rimane costante.

Raveggi Martina

Sabatino Stefania

Vignolini Sara.