

Esercizi di riepilogo su intervalli di confidenza e test di ipotesi

Nota: i punti o esercizi contrassegnati da un asterisco si riferiscono ad argomenti esclusi dal compito del 16 dicembre 2010 (ma inclusi nei compiti successivi)

Esercizio A

Un'indagine su un campione di 263 consumatori rivela che 112 di essi ricordano la pubblicità televisiva del detersivo Splendex.

- A.1. Costruire un intervallo di confidenza al 95% per la proporzione di consumatori che ricordano la pubblicità.
- A.2. Spiegare come va interpretato l'intervallo di confidenza costruito al punto precedente.
- A.3. Spiegare perché in questa applicazione l'approssimazione su cui si basa l'intervallo di confidenza per la proporzione deve ritenersi sufficientemente accurata.
- A.4. Ricalcolare l'intervallo di confidenza adottando un livello del 90%.
- A.5. Considerando un livello del 90%, quanti consumatori occorrerebbe intervistare per avere un intervallo di ampiezza non superiore a 0.06? (per il calcolo si assuma che la vera proporzione sia 0.5)
- A.6. Supponiamo che l'obiettivo dell'azienda produttrice di Splendex fosse quello di ottenere una proporzione di ricordo della pubblicità *superiore* al 40%. Verificare con un test al livello di significatività 5% se tale obiettivo può considerarsi raggiunto (enunciare le due ipotesi, calcolare la statistica test e il valore critico).
- A.7. In questa applicazione il livello di significatività 5% significa che vi è una probabilità del 5% di affermare che ... quando invece ... (completare)
- A.8. *Calcolare il p-value del test.
- A.9. *Come si interpreta il p-value?
- A.10. *Usare il p-value per determinare l'esito del test al livello di significatività 10%.

Esercizio B

Un'azienda che produce ciambelle vuole valutare il contenuto energetico in Kcal. A tale scopo 8 ciambelle vengono sottoposte ad un apposito test di laboratorio, ottenendo i seguenti valori: 373, 373, 375, 373, 374, 371, 374, 373.

- B.1. Consideriamo due modi alternativi di selezionare le 8 ciambelle: a) si incarica il responsabile del processo produttivo di scegliere le 8 migliori ciambelle della giornata; b) si numerano le ciambelle prodotte nella giornata e si procede ad una estrazione casuale. Quale dei due metodi deve essere utilizzato per fare inferenza sulle caratteristiche del processo produttivo?
- B.2. Costruire un intervallo di confidenza al 99% per il contenuto energetico delle ciambelle.
- B.3. Spiegare come va interpretato l'intervallo di confidenza costruito al punto precedente: in particolare, cosa significa un livello del 99%?
- B.4. Se la distribuzione del contenuto energetico non fosse normale, in che cosa l'intervallo appena calcolato sarebbe sbagliato?
- B.5. Perché in questa applicazione non ci si può appellare al teorema limite centrale?
- B.6. Supponiamo di osservare una nuova ciambella con contenuto energetico 375 Kcal. Spiegare perché, nonostante 375 non sia compreso nell'intervallo di confidenza, tale ciambella non deve ritenersi anomala.
- B.7. Se si volesse ottenere un intervallo di confidenza al 99% di ± 0.25 Kcal intorno alla media (cioè di ampiezza totale 0.5 Kcal), quante ciambelle bisognerebbe esaminare? (per evitare la dipendenza dai gradi di libertà effettuare il calcolo usando il valore critico della normale anziché della t).

- B.8. Sottoporre a test l'ipotesi che il contenuto energetico *non superi* 372 Kcal (fissare al 5% la probabilità di errore di prima specie).
- B.9. Spiegare cos'è *in questa applicazione* l'errore di seconda specie (esprimere le ipotesi in termini di Kcal).
- B.10. La probabilità di commettere un errore di seconda specie è più elevata quando il vero valore del contenuto energetico è 373 oppure quando è 374? (spiegare il motivo ma *senza fare calcoli*).
- B.11. *Calcolare la probabilità errore di seconda specie nell'ipotesi che il contenuto energetico sia 373; ripetere il calcolo nell'ipotesi che il contenuto energetico sia 374.
- B.12. Supponiamo che si decida di ridurre la probabilità di errore di *prima* specie dal 5% al 3%: in tal caso la probabilità di errore di *seconda* specie aumenterà, diminuirà oppure non si può dire a priori?

Esercizio C

- C.1 *Un'ipotesi nulla è rifiutata a livello di significatività 0.025, ma non ad un livello di 0.01. Ciò significa che il p -value del test è compreso tra 0.01 e 0.025. Vero o falso?
- C.2 Si supponga di avere le seguenti ipotesi: $H_0 : \mu = 277$ e $H_1 : \mu < 277$, e di sapere che $\sigma = 13.5$. Si estrae un campione casuale di 20 osservazioni e sia $\alpha = 0.05$. Per quali valori della media campionaria rifiuteremo l'ipotesi nulla?
- C.3 L'U.S. Postal Service asserisce che almeno il 63.4% della posta pubblicitaria viene letta dai destinatari. Un gruppo ambientalista vuole verificare tale affermazione. Viene estratto un campione di 220 famiglie e si rileva che solo il 58.7% legge la posta pubblicitaria. Quale delle seguenti frasi è maggiormente accurata? i) Si rifiuta l'ipotesi nulla con $\alpha = 0.05$; ii) Non si rifiuta l'ipotesi nulla con $\alpha \leq 0.10$; iii) Si rifiuta l'ipotesi nulla con $\alpha = 0.10$; iv) Si rifiuta l'ipotesi nulla con $\alpha = 0.01$.
- C.4 Cosa denota la quantità $(1 - \alpha)$? i) La probabilità di non rifiutare l'ipotesi nulla quando questa è vera; ii) la probabilità dell'errore di I tipo; iii) la probabilità dell'errore di II tipo; iv) la potenza del test.

*Esercizio D

I fogli di plastica prodotti da un macchinario sono periodicamente controllati per verificarne le variazioni nello spessore: se la varianza degli spessori supera i 2.25 mm^2 è necessario un intervento per controllare il processo produttivo. In un campione casuale di 10 fogli prodotti in un particolare turno, si sono ottenute le seguenti misure di spessore (in mm)

226 226 232 227 225 228 225 228 229 230

- D.1 Calcolare la varianza campionaria
- D.2 Sottoporre a verifica l'ipotesi nulla che il processo stia funzionando correttamente ($\alpha = 0.05$)
- D.3 Ripetere il test con ($\alpha = 0.01$)
- D.4 In base alle risposte precedenti e senza fare calcoli, stabilire in quale intervallo di valori si trova il p -value.
- D.5 Sottoporre a verifica l'ipotesi nulla che il processo richieda un intervento ($\alpha = 0.01$)
- D.6 I risultati dei due test con $\alpha = 0.01$ (punti D.3 e D.5) sembrano in contraddizione: uno non rifiuta l'ipotesi che il processo stia funzionando correttamente, l'altro non rifiuta l'ipotesi che il processo richieda un intervento. Spiegare perché si tratta di una contraddizione apparente.

Soluzioni

Esercizio A –

$$\text{prop} = 112/263 = 0.4259$$

- .1 $0.4259 \pm 1.96 \cdot \text{radq}((0.4259) \cdot (1-0.4259)/263) = 0.4259 \pm 0.0598 = [0.3661, 0.4857]$
- .5 $0.4259 \pm 1.645 \cdot \text{radq}((0.4259) \cdot (1-0.4259)/263) = 0.4259 \pm 0.0502 = [0.3757, 0.4761]$
- .6 $0.03 = 1.645 \cdot \text{radq}(0.5(1-0.5)/n) \rightarrow \text{radq}(n) = 1.645 \cdot 0.5/0.03 \rightarrow n = 752$
- .7 $(0.4259-0.4) / \text{radq}(0.4 \cdot (1-0.4)/263) = 0.0259 / 0.0302084 = 0.8574$ contro v.c. 1.645
- .9 da 0.86 si ricava 0.8051 $\rightarrow$ p-value = 0.1949

Esercizio B –

- 2) $373.25 \pm (3.4995 \cdot 1.1649 / \text{radq}(8)) = 373.25 \pm 1.4413 = [371.8087, 374.6913]$
- 7) valore critico 2.5758 $\rightarrow 2.5758 \cdot 1.1649 / \text{radq}(n) = 0.25 \rightarrow n = 144.0527$ quindi 145
- 8) statistica test $t = 3.0351$, valore critico = 1.8946 $\rightarrow$ si rifiuta H_0

Esercizio C –

- C.1 vero
- C.2 Media campionaria < 272.0.
- C.3 iii
- C.4 i

Esercizio D –

- D.1 varianza campionaria = 5.1556 (Dev.st. = 2.2706)
- D.2 statistica test = 20.6222 (p-value = 0.0144) valore critico = 16.9190 rifiuto
- D.3 valore critico = 21.6660 non rifiuto
- D.4 p-value tra 0.01 e 0.05
- D.5 valore critico = 2.0879 non rifiuto