

Operazioni sui vettori

Vettore

Un vettore \mathbf{v} è un insieme ordinato di elementi. Per esempio, il seguente è un vettore di 3 elementi:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}$$

Gli elementi di un vettore si indicano solitamente con i seguenti simboli:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v1 \\ v2 \\ v3 \end{bmatrix}$$

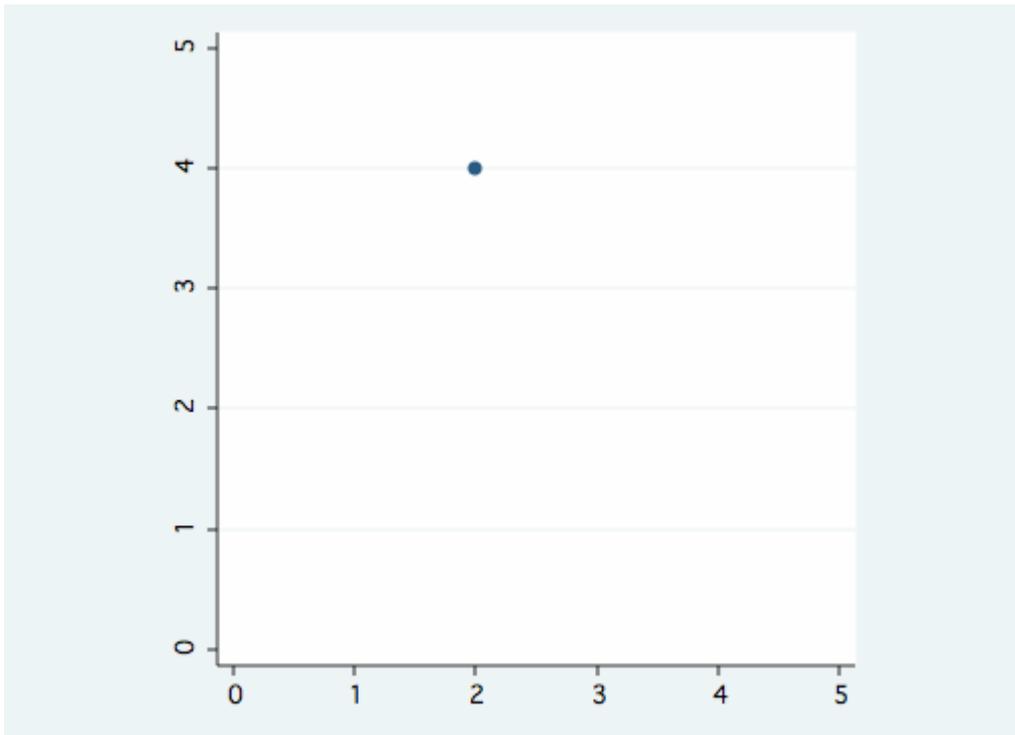
Un esempio di vettore numerico di tre elementi:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

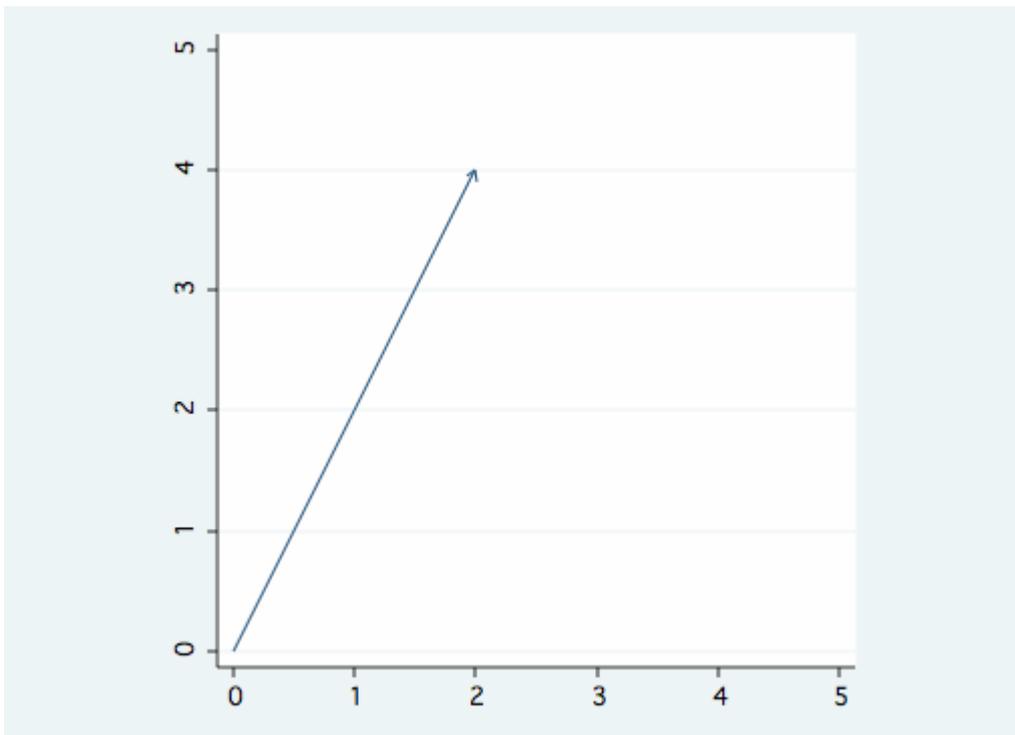
- Un vettore di 3 elementi si dice tri-dimensionale. In generale, un vettore di n elementi è un vettore n -dimensionale.
- Un vettore è rappresentato da una COLONNA di elementi.
- Utilizzeremo una lettera in grassetto minuscolo per indicare un vettore.
- Un vettore è una quantità con una DIREZIONE, per esempio, un vettore bi-dimensionale può essere rappresentato come un segmento di retta che parte dall'origine degli assi e arriva a un punto del piano cartesiano.

Esempio:

Consideriamo il vettore $\mathbf{x}' = [2 \ 4]$. Questo può essere rappresentato come il punto (2, 4) nello spazio bi-dimensionale.



O con una freccia che parte dall'origine degli assi e arriva al punto (2, 4).



Trasposizione di un Vettore

- Quando scriviamo un vettore su una riga, utilizziamo il simbolo ' per indicare la "trasposizione."
- $\mathbf{v}' = [3 \ 2 \ 2]$

- La trasposizione è definita per le matrici, ma è utile per scrivere i vettori come vettori-riga. Possiamo pensare ad un vettore-colonna n -dimensionale come ad una matrice con n righe e 1 colonna, mentre il vettore-riga è una matrice con n colonne e 1 riga.

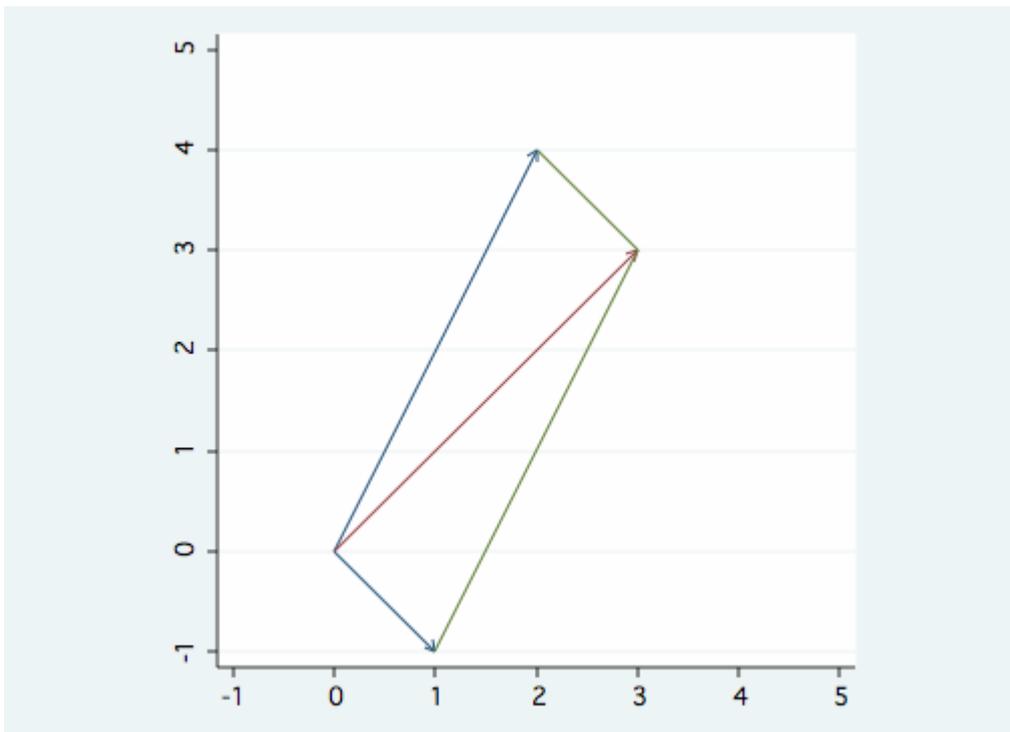
Somma tra Vettori

- I vettori si sommano elemento per elemento. Siano $\mathbf{v}' = [3 \ 2 \ 2]$ e $\mathbf{w}' = [4 \ 1 \ 2]$ allora $\mathbf{v}' + \mathbf{w}' = [7 \ 3 \ 4]$.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

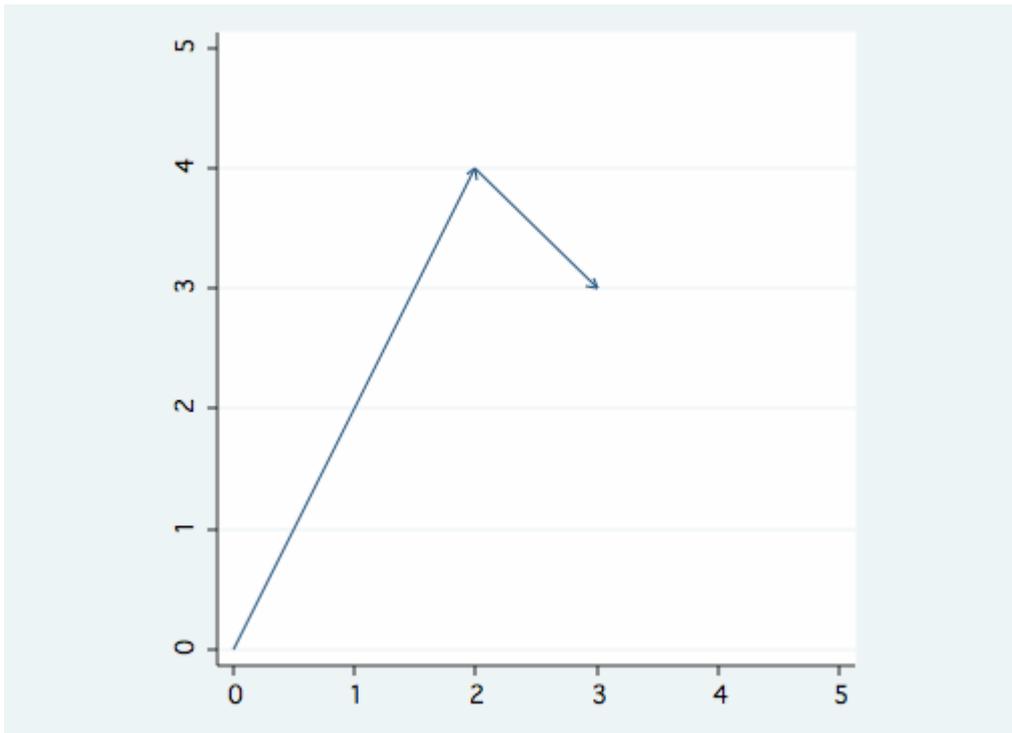
- La somma tra vettori gode della proprietà commutativa, $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$.
- Possono essere sommati solo vettori della stessa dimensione.
- La somma tra due vettori bi-dimensionali può essere rappresentata come la diagonale di un parallelogramma.

Esempio: Si considerino $\mathbf{x}' = [2 \ 4]$ e $\mathbf{y}' = [1 \ -1]$. Allora $\mathbf{x}' + \mathbf{y}' = [3 \ 3]$.



- La somma di 2 vettori bi-dimensionali può essere rappresentata geometricamente come due frecce posizionate una di seguito all'altra nel piano cartesiano.

Esempio: si considerino $\mathbf{x}' = [2 \ 4]$ e $\mathbf{y}' = [1 \ -1]$. Allora $\mathbf{x}' + \mathbf{y}' = [3 \ 3]$.



Sottrazione tra Vettori

- La sottrazione tra vettori avviene elemento per elemento. Siano $\mathbf{v}' = [3 \ 2 \ 2]$ e $\mathbf{w}' = [4 \ 1 \ 2]$ allora $\mathbf{v}' - \mathbf{w}' = [-1 \ 1 \ 0]$
- Per poter effettuare la sottrazione tra due vettori, questi devono avere lo stesso numero di elementi.
- La differenza tra due vettori può essere rappresentata dalla diagonale di un parallelogramma.

Moltiplicazione per uno scalare

- Moltiplicare ogni elemento del vettore per lo scalare.
- Sia $c = 3$ e $\mathbf{v}' = [3 \ 2 \ 2]$ allora $c\mathbf{v}' = [9 \ 6 \ 6]$.

$$3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Prodotto scalare

- Moltiplicare elemento per elemento e sommare i prodotti.
- Siano $\mathbf{v}' = [3 \ 2 \ 2]$ e $\mathbf{w}' = [4 \ 1 \ 2]$ then $\mathbf{v}' \cdot \mathbf{w}' = 12+2+4=18$.
- Il prodotto scalare può essere fatto solo tra vettori con lo stesso numero di elementi.
- Il prodotto scalare gode della proprietà commutative: $\mathbf{v}' \cdot \mathbf{w}' = \mathbf{w}' \cdot \mathbf{v}'$.
- Il prodotto scalare di un vettore per se stesso corrisponde alla soma del quadrato dei suoi elementi. Così, $\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' = 17$ e $\mathbf{w}' \cdot \mathbf{w}' = 21$.

Lunghezza di un Vettore

- La lunghezza di un vettore corrisponde alla radice quadrata del prodotto scalare del vettore per se stesso, cioè: $\text{lung}(\mathbf{v}) = (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v})^{0.5}$.
- La lunghezza del vettore è un'applicazione del Teorema di Pitagora.
- La lunghezza del vettore è anche detta **norma** del vettore.
- Dato il vettore $\mathbf{v}' = [4 \ 3]$ la sua lunghezza $\text{lung}(\mathbf{v}) = \text{norm}(\mathbf{v}) = (25)^{0.5} = 5$
- La lunghezza è generalizzabile per vettore di dimensione maggiore di 2.
- Dato $\mathbf{w}' = [5 \ 6 \ 4]$ si ha $\text{norm}(\mathbf{w}) = (77)^{0.5} = 8.775$
- Dato $\mathbf{w}' = [5 \ 6 \ 4 \ 4]$ si ha $\text{norm}(\mathbf{w}) = (93)^{0.5} = 9.644$

Vettori di lunghezza unitaria

- Un vettore può avere lunghezza unitaria.
- Dato $\mathbf{v}' = [1/2 \ 1/2 \ 1/2 \ 1/2]$ si ha $\text{norm}(\mathbf{v}) = (1)^{0.5} = 1$
- È possibile ottenere un vettore di lunghezza unitaria dividendo ogni elemento del vettore per la lunghezza del vettore stesso

Per esempio: dato $\mathbf{v}' = [a \ b \ c]$ se poniamo $\mathbf{w}' = [a/\text{norm}(\mathbf{v}) \ b/\text{norm}(\mathbf{v}) \ c/\text{norm}(\mathbf{v})]$ o $(1/\text{norm}(\mathbf{v})) [a \ b \ c]$ si ha $\text{norm}(\mathbf{w}) = 1$.

Vettore Unità

- Il vettore unità è un vettore i cui elementi sono tutti pari a 1. Usualmente il vettore unitario si indica con il simbolo \mathbf{u} o $\mathbf{1}$.
 - Così il vettore unitario di dimensione 4 si indica con $\mathbf{u} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$ o $\mathbf{1} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$
 - Il vettore unità è ovviamente una entità differente dal vettore di lunghezza unitaria!
 - Il prodotto scalare di un vettore unità per se stesso è pari al numero di elementi che compongono il vettore. Per esempio, dato $\mathbf{u} = [1 \ 1 \ 1]$ si ha $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 3$
 - Il prodotto scalare tra un vettore unità e un vettore qualunque della stessa dimensione è pari alla somma degli elementi del vettore.
Sia $\mathbf{v} = [3 \ 1 \ 2]$ allora $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 6$
-