Introduzione all'inferenza statistica
V lezione

—

Intervalli di confidenza

—

Carla Rampichini

Dipartimento di Statistica "Giuseppe Parenti" - Firenze - Italia

rampichini@ds.unifi.it - www.ds.unifi.it/rampi/

Intervalli di confidenza

In un problema di stima per intervalli, l'inferenza è un'affermazione del tipo "$\theta \in C$", dove $C \subset \Theta$ e $C = C(\mathbf{x})$ è un insieme determinato dal valore dei dati osservati $\mathbf{X} = \mathbf{x}$.

Definizione Una *stima per intervalli* di un parametro reale θ è una qualunque coppia di funzioni di un campione, $L(x_1, \ldots, x_n)$ e $U(x_1, \ldots, x_n)$, che soddisfa $L(\mathbf{x}) \leq U(\mathbf{x})$ per $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$. Se si osserva $\mathbf{X} = \mathbf{x}$, si formula l'inferenza

$$\boxed{L(\mathbf{x}) \leq \theta \leq U(\mathbf{x}).}$$

L'*intervallo casuale* $[L(\mathbf{x}), U(\mathbf{x})]$ è detto *stimatore intervallare*.

Perchè conviene utilizzare un intervallo?
Con la stima puntuale, $P(T(\mathbf{x}) = \theta) = 0$, mentre è possibile calcolare la probabilità che l'*intervallo contenga* il vero valore incognito θ.

Probabilità di *copertura*

Si usa un intervallo al posto di una stima puntuale per avere qualche garanzia di *catturare* il vero valore del parametro di interesse.

Definizione Dato l'intervallo casuale $[L(\mathbf{x}), U(\mathbf{x})]$ del parametro θ, la *probabilità di copertura* di $[L(\mathbf{x}), U(\mathbf{x})]$ è la probabilità che l'intervallo casuale $[L(\mathbf{x}), U(\mathbf{x})]$ contenga il vero parametro θ:

$$\boxed{P_\theta(\theta \in [L(\mathbf{x}) \leq \theta \leq U(\mathbf{x})].}$$

Definizione Per uno stimatore intervallare $[L(\mathbf{x}), U(\mathbf{x})]$ del parametro θ, il *coefficiente di confidenza* di $[L(\mathbf{x}), U(\mathbf{x})]$ è il limite inferiore della probabilità di copertura, cioè:

$$\boxed{\inf_\theta P_\theta(\theta \in [L(\mathbf{x}) \leq \theta \leq U(\mathbf{x})]).}$$

Interpretazione degli intervalli

Nell'interpretare un un intervallo è necessario porre alcune cautele

- La quantità casuale è l'*intervallo*, non il parametro!
  $\Rightarrow P_\theta(\theta \in [L(\mathbf{x}) \leq \theta \leq U(\mathbf{x})])$ riguarda $\mathbf{X}$, non θ!
- Gli stimatori intervallari sono detti anche *intervalli di confidenza*.
- Poichè il vero valore di θ non è noto, si può garantire solo una probabilità uguale all'estremo inferiore di Θ, il coefficiente di confidenza. In generale $P_\theta(\theta \in [L(\mathbf{x}) \leq \theta \leq U(\mathbf{x})])$ varia al variare di θ.

Come si trova un intervallo di confidenza?

- Invertendo un test statistico (Casella e Berger § 9.2)
- statistica pivot (Piccolo § 19.3)
- teoria asintotica (Piccolo § 19.4)

Inversione di un test statistico

▶ Ogni insieme di confidenza corrisponde a un test statistico e viceversa.

Esempio : $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $N(\mu, \sigma^2)$, σ nota
Dato il test $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_0 : \mu \neq \mu_0$
di dimensione α, con $R = \{\mathbf{x} :\mid \overline{x} - \mu_0 \mid > z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt(n)}\}$

- La regione di accettazione del test
  $A(\mathbf{x}) = [\mu_0 - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt(n)} \leq \overline{x} \leq \mu_0 + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt(n)}]$
  è l'insieme di valori in $\mathcal{X}$ per i quali si accetta $H_0 : \mu = \mu_0$.
- L'insieme di confidenza $1 - \alpha$:
  $C(\mathbf{x}) = [\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt(n)} \leq \mu \leq \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt(n)}]$ è l'insieme di valori in Θ che fornisce i valori plausibili di θ.

La relazione tra test e insieme di confidenza è data dalla tautologia:

$$\boxed{\mathbf{x} \in A(\mu_0) \Leftrightarrow \mu \in C(\mathbf{x}).}$$

Teorema di inversione

Teorema. Per ogni $\theta_0 \in \Theta$, sia $A(\theta_0)$ la regione di accettazione del test di livello α per $H_0 : \theta = \theta_0$. Per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, definiamo l'insieme $C(\mathbf{x})$ nello spazio parametrico con:

$$C(\mathbf{x}) = \{\theta_0 : \mathbf{x} \in A(\theta_0)\}.$$

Allora l'insieme casuale $C(\mathbf{x})$ è un insieme di confidenza $(1 - \alpha)$.
Viceversa, sia $C(\mathbf{x})$ un insieme di confidenza $(1 - \alpha)$. Per ogni $\theta_0 \in \Theta$ definiamo

$$A(\theta_0) = \{\mathbf{x} : \theta_0 \in C(\mathbf{x})\}$$

allora $A(\theta_0)$ è la regione di accettazione di un test livello α per $H_0 : \theta = \theta_0$.

▶ viene *invertita* una *famiglia di test*(per ogni $\theta \in \Theta_0$) ;

▶ H_1 determina la forma di $A(\theta_0)$ e questa a sua volta determina $C(\mathbf{x})$. Non c'è garanzia che l'insieme di confidenza ottenuto invertendo il test sia un intervallo.

▶ le proprietà del test si trasferiscono all'intervallo.

Lunghezza intervallo

▶ La lunghezza dell'intervallo casuale $D(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}) - L(\mathbf{x})$ in genere è una v.c. A parità di α si desidera $D(\mathbf{x})$ minima.

Esempio: Intervallo per la media di una v.c. Normale con σ nota.

$$D(\mathbf{x}) = (\overline{X} + z_{\alpha/2}\tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}) - (\overline{X} - z_{\alpha/2}\tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 2z_{\alpha/2}\tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

In questo caso $D(\mathbf{x})$ NON è casuale!

$\Rightarrow$ si può trovare n che fornisce $D(\mathbf{x}) = d_0$: $n = 4\sigma^2 \left(\frac{z_{\alpha/2}}{d_0}\right)^2$.

P.e. $1 - \alpha = 0.95$, $z_{\alpha/2} = 1.96 \simeq 2$, per $d_0 = 2$ si richiede $n \simeq 4\sigma^2$.

▶ In generale si cercherà un compromesso tra il coefficiente di confidenza (che si vorrebbe elevato) e la lunghezza dell'intervallo (che si desidera minima).

Test delle ipotesi e intervalli di confidenza

▶ Test delle ipotesi e stime per intervalli si pongono la stessa domanda, ma da un punto di vista diverso:

- il test *fissa il parametro* e si chiede *quali valori campionari* sono consistenti con Θ_0, definendo la regione di accettazione $A(\theta_0)$;
- lo stimatore per intervalli *fissa il valore campionario* e si chiede *quali valori di* θ rendono più plausibile il valore campionario, definendo un insieme di confidenza $C(\mathbf{x})$.

Metodi per valutare gli stimatori intervallari

- dimensione (ampiezza) e probabilità di copertura
- criteri di ottimalità legati ai test
- ottimalità bayesiana
- funzione di perdita ottimale

Per approfondimenti: Casella e Berger § 9.3

► Esistono altri metodi per trovare intervalli (Piccolo, Casella e Berger)

- variabile casuale pivot
- teoria asintotica
- intervalli bayesiani