Operazioni tra matrici

Definizione di matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$(n,m) \qquad (3,2)$

- a_{ij} è un elemento di $\mathbf{A}$
- a_{ij} è detto l'elemento ij -esimo di $\mathbf{A}$

Moltiplicazione per uno Scalare

- Moltiplicare ogni elemento della matrice per lo scalare.
- Sia $c = 3$

$$c * \mathbf{A} = \mathbf{B}$$
$$3 * \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$(3,2) \qquad (3,2)$

Addizione e Sottrazione di matrici

- Aggiungere ciascun elemento della prima matrice all'elemento corrispondente della seconda matrice.
- Per operare l'addizione tra matrici le due matrici devono avere le stesse dimensioni.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & + & \mathbf{B} & = & \mathbf{C} \\ \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{array} \right] & + & \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{array} \right] & = & \left[\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 7 & 4 \\ -4 & 3 \end{array} \right] \\ (3,2) & & (3,2) & & (3,2) \end{array}$$

- L'addizione tra matrici gode della proprietà commutativa:
 $A+B = B+A$
- L'addizione tra matrici gode della proprietà associativa:
 $A+(B+C) = (A+B)+C$

Moltiplicazione tra matrici

- La prima matrice deve avere un numero di colonne pari al numero di righe della seconda;
- Ciascun elemento della matrice prodotto si ottiene dal prodotto scalare tra ciascuna riga della prima matrice per ciascuna colonna della seconda: $c_{ik} = \sum_j d_{ij} \times a_{jk}$;
- La matrice prodotto ha un numero di righe pari alle righe della prima matrice e un numero di colonne pari alle colonne della seconda

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D} & * & \mathbf{A} & = & \mathbf{C} \\ \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{array} \right] & * & \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{array} \right] & = & \left[\begin{array}{cc} 1 & 10 \\ 0 & 4 \end{array} \right] \\ (2,3) & & (3,2) & & (2,2) \end{array}$$

Si noti:

- In generale, $\mathbf{A} * \mathbf{B}$ non è uguale a $\mathbf{B} * \mathbf{A}$ → la moltiplicazione tra matrici non è commutativa
- La moltiplicazione tra matrici gode della proprietà associativa: $(\mathbf{A} * \mathbf{B}) * \mathbf{C} = \mathbf{A} * (\mathbf{B} * \mathbf{C})$
- La moltiplicazione tra matrici gode della proprietà distributiva: $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C}$ e $(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{A} + \mathbf{C}\mathbf{A}$

Matrice Trasposta

- La matrice trasposta $\mathbf{X}'$ si ottiene scambiando le righe con le colonne

$$\begin{array}{cc} \mathbf{X} & \mathbf{X}' \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ (3,2) & (2,3) \end{array}$$

Si noti:

- $(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}' \rightarrow$ La trasposta del prodotto corrisponde al prodotto delle trasposte, scambiando la prima matrice con la seconda

Matrice Unità

- È una matrice i cui elementi sono tutti 1. Di solito si indica con $\mathbf{U}$ o $\mathbf{1}$.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice quadrata

- Una matrice avente lo stesso numero di righe e di colonne è una matrice quadrata

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- La **traccia** di una matrice quadrata è data dalla somma degli elementi che si trovano lungo la diagonale principale

Matrice Diagonale

- Una matrice quadrata con elementi non-nulli solo sulla diagonale principale si dice matrice diagonale

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrice Identità

- Una matrice diagonale i cui elementi non-nulli sono tutti pari a 1 si dice matrice identità. La matrice identità si indica con il simbolo **I**

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- La matrice identità è l'elemento neutro del prodotto tra matrici, cioè:

$$\mathbf{I}_{n \times n} \times \mathbf{A}_{n \times m} = \mathbf{A}_{n \times m} \times \mathbf{I}_{m \times m} = \mathbf{A}_{n \times m}$$

Matrice Simmetrica

- Una matrice quadrata la cui trasposta è pari alla matrice di partenza, cioè per cui vale $\mathbf{C} = \mathbf{C}'$, è una matrice simmetrica

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

- Si osservi che una matrice simmetrica ha gli elementi opposti alla diagonale uguali tra loro, cioè $c_{ij} = c_{ji}$

Matrice Triangolare

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinante di una Matrice

Il determinante di una matrice quadrata si indica con

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}|$$

- Il determinante di una matrice $\mathbf{A}_{n \times n}$ può essere definito tramite la formula di Leibniz:

$$\det(\mathbf{A}) := \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$$

- S_n è l'insieme di tutte le permutazioni σ dell'insieme numerico $\{1, 2, \dots, n\}$
 - $\text{sgn}(\sigma)$ denota il segno della permutazione: $+1$ se σ è una permutazione pari, -1 se è dispari
 - il numero delle permutazioni di n oggetti è pari al fattoriale di n
 - una permutazione è detta pari o dispari a seconda che sia ottenibile come prodotto di un numero pari o dispari di trasposizioni
- Il calcolo del determinante è semplice per matrici 2×2 e 3×3 , più complesso per matrici di dimensione superiore.
 - Per la matrice $\mathbf{A}$ di dimensione 2×2 :

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- Se $n = 3$, si ottiene

$$\det(\mathbf{A}) = a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} + a_{1,3} a_{2,1} a_{3,2} + a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} - a_{1,3} a_{2,2} a_{3,1} - a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2} - a_{1,2} a_{2,1} a_{3,3}$$

Quest'ultima formula può essere memorizzata tramite la regola di Sarrus (che non è però estendibile ai casi $n > 3$):

calcolare i prodotti dei termini sulle diagonali "continue", ripetendo a destra della matrice le sue prime due colonne

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

i prodotti delle componenti sulle 3 "diagonali" che partono dall'alto a sinistra (diagonali principali) sono aei , bfh e cdg , mentre sulle 3 "diagonali" che partono dal basso a sinistra (diagonali secondarie) si trovano gce , hfa , idb . Il determinante della matrice è esattamente la differenza tra la somma dei primi tre termini ($aei + bfh + cdg$) e la somma degli ultimi tre ($gce + hfa + idb$).

Inversa di una Matrice

- Se una matrice $\mathbf{A}$ è quadrata e con determinante diverso da 0, è possibile trovare una matrice $\mathbf{B}$: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{I}$
- La matrice inversa si indica con il simbolo $\mathbf{A}^{-1}$
- Si ha quindi: $\mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{A} = \mathbf{A} \times \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$
- Per uno scalare: $a^{-1} = 1/a$ e $1/a \times a = a \times 1/a = 1$
- Esistono vari metodi per il calcolo dell'inversa di una matrice quadrata invertibile $\mathbf{A}$. Il metodo della matrice dei cofattori (o complementi algebrici) risulta particolarmente rapido quando non interessa calcolare tutti gli elementi della matrice inversa, e quando la matrice è di dimensione contenuta

Esempio: Inversa e Determinante di una Matrice

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2156863 & -0.254902 & 0.1372549 \\ -0.254902 & 0.3921569 & 0.0196078 \\ 0.1372549 & 0.0196078 & -0.04902 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{C}| = -102$$

Somme per Colonna e per Riga

Data $\mathbf{X}$ di dimensione $n \times m$:

- Somme per colonna: $\mathbf{t}_{1 \times m} = \mathbf{u}'_{1 \times n} \times \mathbf{X}_{n \times m}$
- Somme per riga: $\mathbf{t}_{n \times 1} = \mathbf{X}_{n \times m} \times \mathbf{u}_{m \times 1}$

Concatenamento orizzontale

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} , \mathbf{B}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$
$$(3,4) \qquad (3,2) \qquad (3,2)$$

Concatenamento Verticale

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \ \backslash \ \mathbf{B}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \ \backslash \ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$(6,2) \qquad (3,2) \qquad (3,2)$