STATISTICA (II modulo - Inferenza Statistica)
Soluzione esercitazione 1

A. Le probabilità richieste sono:

1. $\Pr(\bar{A}) = 1 - 0,3 = 0,7$, $\Pr(\bar{B}) = 1 - 0,6 = 0,4$, $\Pr(\bar{C}) = 1 - 0,35 = 0,65$.
2. $\Pr(A|B) = 0,25/0,6 = 0,42$,
   $\Pr(A|B \cap C) = 0,10/0,21 = 0,48$,
   $\Pr(A|\bar{B}) = \Pr(A \cap \bar{B}) / \Pr(\bar{B}) = [\Pr(A) - \Pr(A \cap B)] / \Pr(\bar{B}) = (0,3 - 0,25)/0,4 = 0,05/0,4 = 0,125$,
   $\Pr(A \cup C|B) = \Pr(A|B) + \Pr(C|B) - \Pr(A \cap C|B) = 0,25/0,6 + 0,21/0,6 - 0,10/0,6 = 0,42 + 0,35 - 0,17 = 0,6$;
3. $\Pr(A \cup B) = 0,3 + 0,6 - 0,25 = 0,65$
   $\Pr(A \cup C) = 0,3 + 0,35 - 0,15 = 0,5$,
   $\Pr(A \cup \bar{B}) = 0,3 + 0,4 - 0,05 = 0,65$

B. Si indichi con A_i l'evento "la banca i decide di aprire uno sportello" per il quale $\Pr(A_i) = 0,5$ (e dunque $\Pr(\bar{A}_i) = 0,5$) per $i = 1,2,3$.
Lo spazio degli eventi è dato da tutti i possibili modi con cui si possono combinare gli eventi elementari A_i e $\bar{A}_i$ per le tre banche:

$$\begin{aligned}\Omega =\{&(A_1, A_2, A_3),\ (\bar{A}_1, A_2, A_3),\ (A_1, \bar{A}_2, A_3),\ (A_1, A_2, \bar{A}_3),\\ &(\bar{A}_1, \bar{A}_2, A_3),\ (\bar{A}_1, A_2, \bar{A}_3),\ (A_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3),\ (\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3)\}\end{aligned}$$

1. $\Pr(\{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3\}) = \Pr(\bar{A}_1)\Pr(\bar{A}_2)\Pr(\bar{A}_3) = 0,5^3 = 0,125$
2. $\Pr(\{A_1, A_2, A_3\}) = \Pr(A_1)\Pr(A_2)\Pr(A_3) = 0,5^3 = 0,125$
3. $1 - \Pr(\{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3\}) = 1 - 0,125 = 0,875$

C. Indicando gli eventi $D_i =$\{l'i-esimo pezzo estratto è difettoso\} e $\bar{D}_i =$\{l'i-esimo pezzo estratto non è difettoso\}, le probabilità richieste si possono calcolare come segue:

1. $\Pr(D_1 \cap \bar{D}_2) = \Pr(D_1)\Pr(\bar{D}_2|D_1) = 2/20 \times 18/19 = 0,0947$
2. $\Pr(D_1 \cap D_2) = \Pr(D_1)\Pr(D_2|D_1) = 2/20 \times 1/19 = 0,0053$
3. $\Pr(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2) = \Pr(\bar{D}_1)\Pr(\bar{D}_2|\bar{D}_1) = 18/20 \times 17/19 = 0,8053$
4. $\Pr(\{D_1 \cap \bar{D}_2\} \cup \{\bar{D}_1 \cap D_2\} \cup \{\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2\}) = \Pr(D_1)\Pr(\bar{D}_2|D_1) + \Pr(\bar{D}_1)\Pr(D_2|\bar{D}_1) + \Pr(\bar{D}_1)\Pr(\bar{D}_2|\bar{D}_1) = 2/20 \times 18/19 + 18/20 \times 2/19 + 18/20 \times 17/19 = 0,9947$

D. Si indichi con A l'evento "su 5 palline estratte con ripetizione da un'urna contenente 100 palline ve ne siano almeno due uguali". La probabilità cercata si può calcolare come la probabilità dell'evento complementare $\bar{A}$, cioè dell'evento che tutte le palline estratte siano diverse. Quindi:

$$\Pr(A) = 1 - \frac{100 \times 99 \times 98 \times 97 \times 96}{100^5} = 0,09655$$

E. Si indichi con A l'evento "su 5 carte da poker estratte senza ripetizione da un mazzo contenente 52 carte vi siano 3 assi". Gli eventi non sono indipendenti, quindi la probabilità cercata è pari a:

$$\Pr(A) = \Pr(\text{estrarre 3 assi su 5 carte}) \times \text{numero possibili combinazioni} = \frac{4}{52}\frac{3}{51}\frac{2}{50}\frac{48}{49}\frac{47}{48} \times \binom{5}{3} = 0,001736$$

F. Si definisca la v.c. $X = \{\text{numero di difetti presenti in un lotto}\}$.

1. e 2. La distribuzione di probabilità di X e la relativa funzione di ripartizione sono riportate nella seguente tabella:

X	$f(x) = \Pr(X = x)$	$F(x) = \Pr(X \leq x)$
0	3/6	3/6
1	1/6	4/6
2	2/6	1

3.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum x f(x) = 0 \times 3/6 + 1 \times 1/6 + 2 \times 2/6 = 0,8333 \\
\mathrm{Var}(X) &= \sum (x - \mathrm{E}(X))^2 f(x) = (0 - 0,8333)^2 \times 3/6 + (1 - 0,8333)^2 \times 1/6 + (2 - 0,8333)^2 \times 2/6 = \\
&= 0,8056
\end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = \sum x^2 f(x) - \left(\sum x f(x)\right)^2 = \\
&= (0^2 \times 3/6 + 1^2 \times 1/6 + 2^2 \times 2/6) - 0,8333^2 = 0,8056
\end{aligned}$$