STATISTICA (II MODULO - INFERENZA STATISTICA)
Soluzione esercitazione 2

A. Si indichi con X la v.c. binomiale che esprime il numero di dipendenti extracomunitari di un'azienda italiana osservati in un campione casuale di $n = 18$ dipendenti estratti con ripetizione. Quindi, $X \sim$ Binomiale$(18; 0{,}38)$, dove $p = 0{,}38$ è la probabilità di estrarre un dipendente extracomunitario.

1. $\Pr(X \leq 4) = \sum_{x=0}^{4} f(x) = \sum_{x=0}^{4} \binom{18}{x} 0{,}38^x (1-0{,}38)^{18-x} = 0{,}1263$
2. $\Pr(6 \leq X \leq 9) = \sum_{x=6}^{9} f(x) = \sum_{x=6}^{9} \binom{18}{x} 0{,}38^x (1-0{,}38)^{18-x} = 0{,}6382$
3. $\mathrm{E}(X) = n \times p = 18 \times 0{,}38 = 6{,}84$

   $\mathrm{Var}(X) = n \times p \times (1-p) = 18 \times 0{,}38 \times (1-0{,}38) = 4{,}24$

B.

1. $X \sim N(1{,}1)$: $\Pr(0 \leq X \leq 1) = \Phi\left(\frac{1-1}{\sqrt{1}}\right) - \Phi\left(\frac{0-1}{\sqrt{1}}\right) = \Phi(0) - \Phi(-1) = \Phi(0) - [1 - \Phi(1)] = 0{,}5 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}3413$
2. $X \sim N(1{,}4)$: $\Pr(-1 \leq X \leq 1) = \Phi\left(\frac{1-1}{\sqrt{4}}\right) - \Phi\left(\frac{-1-1}{\sqrt{4}}\right) = \Phi(0) - \Phi(-1) = 0{,}3413$
3. $X \sim N(1{,}2)$: $\Pr(X > 1) = 1 - \Pr(X \leq 1) = 1 - \Phi\left(\frac{1-1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \Phi(0) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$
4. $X \sim N(0{,}2)$: $\Pr(-2 \leq X \leq -1) = \Phi\left(\frac{-1-0}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{-2-0}{\sqrt{2}}\right) = \Phi(-0{,}7071) - \Phi(-1{,}4142) = [1 - \Phi(0{,}7071)] - [1 - \Phi(1{,}4142)] = \Phi(1{,}4142) - \Phi(0{,}7071) = 0{,}9213 - 0{,}7602 = 0{,}1611$
5. $X \sim N(1{,}1)$: $\Pr(X < 0) = \Phi\left(\frac{0-1}{\sqrt{1}}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$
6. $X \sim N(\mu{,}\sigma^2)$: $\Pr(\mu \leq X \leq \mu + \sigma) = \Phi\left(\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(1) - \Phi(0) = 0{,}8413 - 0{,}5 = 0{,}3413$

C.

1. Le distribuzione marginali delle due v.c. sono le seguenti:

X	-1	0	1	
$f_X(x)$	0,3	0,4	0,3	1

Y	0	1	
$f_Y(y)$	0,5	0,5	1

   da cui si possono calcolare i valori attesi e le varianze:

   $\mathrm{E}(X) = -1 \times 0{,}3 + 0 \times 0{,}4 + 1 \times 0{,}3 = 0$

   $\mathrm{Var}(X) = (-1-0)^2 \times 0{,}3 + (0-0)^2 \times 0{,}4 + (1-0)^2 \times 0{,}3 = 0{,}6$

   $\mathrm{E}(Y) = 0 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}5 = 0{,}5$

   $\mathrm{Var}(Y) = (0-0{,}5)^2 \times 0{,}5 + (1-0{,}5)^2 \times 0{,}5 = 0{,}25$

2. $$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X{,}Y) &= \textstyle\sum_x \sum_y (x - \mathrm{E}(X))(y - \mathrm{E}(Y)) f(x{,}y) \\ &= (-1-0)(0-0{,}5)0{,}1 + (0-0)(0-0{,}5)0{,}3 + (1-0)(0-0{,}5)0{,}1 + \\ &\quad (-1-0)(1-0{,}5)0{,}2 + (0-0)(1-0{,}5)0{,}1 + (1-0)(1-0{,}5)0{,}2 = 0 \end{aligned}$$

   Anche se la covarianza è nulla non possiamo affermare che X e Y sono indipendenti, ma semplicemente che sono incorrelate (assenza di dipendenza lineare).

3. Date le distribuzioni marginali delle v.c. X e Y, la corrispondente distribuzione congiunta nel caso di indipendenza si ottiene moltiplicando le marginali, cioè $\Pr(X = x, Y = y) = f(x{,}y) = f_X(x) f_Y(y)$. La tabella di indipendenza è, quindi, la seguente:

	Y	
X	0	1
-1	0,15	0,15
0	0,2	0,2
1	0,15	0,15

D. La variabile casuale X che esprime il numero di risposte corrette su 4 domande con risposta vero/falso è di tipo binomiale, cioè $X \sim \text{Binomiale}(n = 4, p)$. La probabilità p di rispondere esattamente ad una domanda è pari a 0,5 nell'ipotesi (a) che lo studente sceglie a caso, mentre nell'ipotesi (b) è pari a 0,8, Sotto l'ipotesi (a), $X \sim \text{Binomiale}(4; 0{,}5)$, per cui:

1. $\Pr(X \geq 2) = \sum_{x=2}^{4} f(x) = \sum_{x=2}^{4} \binom{4}{x} 0{,}5^x (1-0{,}5)^{4-x} = 0{,}6875$
2. $\Pr(X < 3) = \sum_{x=0}^{2} f(x) = \sum_{x=0}^{2} \binom{4}{x} 0{,}5^x (1-0{,}5)^{4-x} = 0{,}6875$

Sotto l'ipotesi (b), $X \sim \text{Binomiale}(4; 0{,}8)$, per cui:

1. $\Pr(X \geq 2) = \sum_{x=2}^{4} f(x) = \sum_{x=2}^{4} \binom{4}{x} 0{,}8^x (1-0{,}8)^{4-x} = 0{,}9728$
2. $\Pr(X < 3) = \sum_{x=0}^{2} f(x) = \sum_{x=0}^{2} \binom{4}{x} 0{,}8^x (1-0{,}8)^{4-x} = 0{,}1808$

E. Dal momento che $X \sim \text{Poisson}(\lambda = 5)$ si ottiene:

1. $\Pr(X = 0) = \frac{5^0}{0!} e^{-5} = e^{-5} = 0{,}0067$
2. $\Pr(X \geq 2) = 1 - \Pr(X < 2) = 1 - \sum_{x=0}^{1} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = 1 - (0{,}0067 + 0{,}0337) = 0{,}9596$
3. Definita $Y = (60 \times 8)X = 480X$ come la v.c. che esprime il numero di acquirenti in una giornata di 8 ore, il valore atteso si calcola come segue:

$$\text{E}(Y) = 480 \times \text{E}(X) = 480 \times 5 = 2400$$