STATISTICA (II modulo - Inferenza Statistica)
Soluzione esercitazione 3

A. Sia $X \sim$ Binomiale$(n = 500; p = 0{,}4)$ la v.c. che esprime il numero di guidatori che indossano regolarmente le cinture di sicurezza in un campione casuale di 500 guidatori. Quindi, $E(X) = np = 500 \times 0{,}4 = 200$ e $\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = 500 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 120$. Essendo n sufficientemente grande è possibile utilizzare l'approssimazione della distribuzione normale alla binomiale per il calcolo delle probabilità richieste.

1. $P(180 \leq X \leq 230) \approx \Phi\left(\frac{230+0{,}5-200}{\sqrt{120}}\right) - \Phi\left(\frac{180-0{,}5-200}{\sqrt{120}}\right) = \Phi(2{,}78) - \Phi(-1{,}87) = 0{,}997 - 0{,}031 = 0{,}966$;
2. $P(X < 175) = P(X \leq 174) \approx \Phi\left(\frac{174+0{,}5-200}{\sqrt{120}}\right) = \Phi(-2{,}33) = 1 - \Phi(2{,}33) = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$

B. Data $X \sim$ Poisson(3), per la quale $f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ con $\lambda = 3$, si ottiene:

1. $\mathrm{E}(X) = 3$, $\mathrm{Var}(X) = 3$, $\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{E}(X)^2 = 3 + 9 = 12$.
2. $P(X = 2) = f(2) = \frac{e^{-3}3^2}{2!} = 0{,}2240$;

   $P(X = 0) = f(0) = \frac{e^{-3}3^0}{0!} = e^{-3} = 0{,}0498$;

   $P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}0498 + 0{,}1494 + 0{,}2240 + 0{,}2240 = 0{,}6472$.
3. Date le costanti $a = 2$ e $b = 3$, si ottiene:

   $\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b = 2 \times 3 + 3 = 9$;

   $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X) = 2^2 \times 3 = 12$.

C. Sia $Z \sim N(0; 1)$, le probabilità cercate si calcolano come segue:

1. $P(Z > 1{,}55) = 1 - \Phi(1{,}55) = 1 - 0{,}9394 = 0{,}0606$;

   $P(-0{,}5 < Z < 0{,}5) = \Phi(0{,}5) - \Phi(-0{,}5) = 0{,}6915 - (1 - 0{,}6915) = 0{,}383$.
2. $P(Z > z) = 1 - \Phi(z) = 0{,}1788$, essendo $\Phi(z) = 1 - 0{,}1788 = 0{,}8212$, dalle tavole si ottiene $z = 0{,}92$;

   $P(Z < z) = \Phi(z) = 0{,}0668$, essendo $P(Z > z') = 0{,}0668$ con $z' = -z$, allora $\Phi(z') = 1 - 0{,}0668 = 0{,}9332$ e dalle tavole si ottiene $z' = 1{,}5$. Infine, $z = -z' = -1{,}5$.

D. Data la v.c. $W = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y$, con $\mathrm{E}(X) = 5$, $\mathrm{Var}(X) = 2$, $\mathrm{E}(Y) = 8$, $\mathrm{Var}(Y) = 4$, si ottiene:

- $\mathrm{E}(W) = \frac{1}{2}\mathrm{E}(X) + \frac{1}{2}\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{2} \times 5 + \frac{1}{2} \times 8 = \frac{13}{2} = 6{,}5$.
- Essendo X e Y v.c. indipendenti, possiamo scrivere

  $\mathrm{Var}(W) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{Var}(X) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 4 = \frac{6}{4} = 1{,}5$.

E. Si definisca la v.c. $X \sim \chi^2(30)$ che esprime la durata di funzionamento di un componente di un macchinario industriale.

1. $P(X \geq 40) = 0{,}1049 \approx 0{,}10$.
2. $P(X \leq x) = 0{,}25$ si ha in corrispondenza del quantile $x_q = \chi^2_{30;1-0{,}25} = 24{,}48$;

   $P(X \leq x) = 0{,}95$ si ha in corrispondenza del quantile $x_q = \chi^2_{30;0{,}05} = 43{,}77$.
3. $\mathrm{E}(X) = 30$, $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{60} = 7{,}746$.

F. Sia $X \sim \chi^2(90)$ il tempo di durata di una lampadina. Quindi:

1. $P(X \geq 60) = 0{,}9937 \approx 0{,}995$;
2. $P(X \geq 60) \approx P\left(Z \geq \dfrac{60-90}{\sqrt{2 \times 90}}\right) = P(Z \geq -2{,}236) = 1 - (1 - \Phi(2{,}236)) = \Phi(2{,}236) = 0{,}987$.

G. Sia $X \sim$ Binomiale$(n = 28; p = 0{,}6)$. Tale distribuzione può essere approssimata con una distribuzione normale con media $28 \times 0{,}6 = 16{,}8$ e varianza $28 \times 0{,}6 \times (1 - 0{,}6) = 6{,}72$. Quindi:

- $P(X = 19) \approx \Phi\left(\dfrac{19{,}5 - 16{,}8}{\sqrt{6{,}72}}\right) - \Phi\left(\dfrac{18{,}5 - 16{,}8}{\sqrt{6{,}72}}\right) = \Phi(1{,}04) - \Phi(0{,}66) = 0{,}851 - 0{,}745 = 0{,}106$;
- $P(12 \leq X \leq 24) \approx \Phi\left(\dfrac{24 + 0{,}5 - 16{,}8}{\sqrt{6{,}72}}\right) - \Phi\left(\dfrac{12 - 0{,}5 - 16{,}8}{\sqrt{6{,}72}}\right) = \Phi(2{,}97) - \Phi(-2{,}04) = 0{,}9985 - 0{,}0207 = 0{,}9778$;
- $P(15 < X < 22) = P(16 \leq X \leq 21) \approx \Phi\left(\dfrac{21 + 0{,}5 - 16{,}8}{\sqrt{6{,}72}}\right) - \Phi\left(\dfrac{16 - 0{,}5 - 16{,}8}{\sqrt{6{,}72}}\right) = \Phi(1{,}81) - \Phi(-0{,}5) = 0{,}9649 - 0{,}3085 = 0{,}6564$.

Se si utilizza la distribuzione esatta, $X \sim$ Binomiale$(n = 28; p = 0{,}6)$, si ottengono i seguenti valori:

- $P(X = 19) = 0{,}1103$;
- $P(12 \leq X \leq 24) = 0{,}9778$;
- $P(15 < X < 22) = 0{,}6636$.

H. Sia $X \sim N(42300; 5300^2)$ la v.c. che descrive la durata del battistrada dei pneumatici di una data marca.

1. $P(X \geq 43000) = P\left(Z \geq \dfrac{43000 - 42300}{5300}\right) = P(Z \geq 0{,}13) = 1 - \Phi(0{,}13) = 1 - 0{,}5517 = 0{,}4483$;
2. $P(37000 \leq X \leq 45000) = P\left(\dfrac{37000 - 42300}{5300} \leq Z \leq \dfrac{45000 - 42300}{5300}\right) = P(-1 \leq Z \leq 0{,}51) = \Phi(0{,}51) - (1 - \Phi(1)) = 0{,}695 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}5363$.